

# THÈSE

présentée pour l'obtention du titre de

DOCTEUR DE L'ÉCOLE NATIONALE  
DES PONTS ET CHAUSSEES

Spécialité : Informatique

par

Geoffray ADDE

**Sujet :** *Méthodes de Traitement d'Image Appliquées au Problème Inverse en Magnéto-Electro-Encéphalographie.*

Soutenance le 12 décembre 2005 devant le jury composé de :

Rapporteurs :	Sylvain BAILLET Isabelle BLOCH
Examineurs :	Alfred ANWANDER Jacques BLUM Renaud KERIVEN
Direction de thèse :	Olivier FAUGERAS



**Titre :** *Méthodes de Traitement d'Image Appliquées au Problème Inverse en Magnéto-Electro-Encéphalographie*

**Résumé :** Ce travail de Thèse traite des problèmes directs et inverses de la magnétoencéphalographie (MEG) et de l'électroencéphalographie (EEG). Trois thématiques y sont abordées. Le problème direct est traité à l'aide des méthodes d'éléments frontière. Une nouvelle formulation, dite formulation symétrique, est proposée. Cette nouvelle formulation est ensuite appliquée au problème de la tomographie par impédance électrique pour lequel deux algorithmes d'estimation de conductivité sont proposés. Le problème inverse est traité dans le cadre des méthodes *image*. Des techniques de régularisation d'image par processus de diffusion sont transposées au problème inverse pour contraindre la reconstruction de sources distribuées. Plusieurs algorithmes sont proposés dont un calculant la solution inverse de variation totale minimale.

**Mots clés :** magnétoencéphalographie (MEG), électroencéphalographie (EEG), problème direct, éléments frontière, formulation symétrique, estimation de conductivité, tomographie par impédance électrique (EIT), problème inverse, estimation de sources, approche image, sources distribuées, régularisation d'image, variation totale.

**Title :** *Image Processing Methods Applied to the Magneto-Electro-Encephalography Inverse Problem*

**Abstract :** This PhD work deals with forward and inverse problem in magnetoencephalography (MEG) and electroencephalography (EEG). Three topics are addressed. The forward problem is issued by the boundary element method (BEM). A new formulation, called symmetric formulation, is proposed. This new formulation is then applied to the electrical impedance tomography (EIT) for which two conductivity estimation algorithms are proposed. The inverse problem is addressed in the *imaging* approach framework. Image regularization techniques by means of diffusion processes are transposed to the inverse problem in order to constrain the reconstruction of distributed sources. Several algorithms are proposed, one of them computes the minimal total variation solution.

**Key words :** magnetoencephalography (MEG), electroencephalography (EEG), forward problem, boundary elements, symmetric formulation, conductivity estimation, Electrical Impedance Tomography (EIT), inverse problem, source estimation, imaging approach, distributed sources, image regularization, total variation.



# *Remerciements*

Mes remerciements vont en premier lieu à Maureen CLERC et Renaud KERIVEN pour la qualité et la complémentarité de leur encadrement ainsi que pour leur disponibilité, et ce, dans des circonstances pas toujours faciles.

Je tiens à remercier Olivier FAUGERAS d'avoir assumé la responsabilité de Maître de Thèse.

J'adresse toute ma gratitude à Isabelle BLOCH et Sylvain BAILLET d'avoir accepté d'être rapporteurs de ce travail ainsi qu'à Jacques BLUM, Alfred ANWANDER pour leur participation à mon jury de thèse.

Mes collaborations avec Jan KYBIC et Théo PAPADOPOULOU ont été très enrichissantes et m'ont beaucoup appris. Je leur en suis très reconnaissant.

Je remercie Line GARNERO d'avoir mis à ma disposition des données sans lesquelles je n'aurais pas pu valider mon travail.

Je suis reconnaissant à Sylvain BAILLET de m'avoir fait part de son expertise en réponse à chacune de mes sollicitations.

J'adresse mes remerciements à Anne-Lise PARADIS pour les données de ses expériences dont elle a bien voulu me faire profiter et le temps qu'elle y a consacré.

Je remercie les membres de l'équipe ODYSSEE de l'ENS à Paris notamment Thomas DENEUX pour sa collaboration.

Je remercie également les membres de l'équipe ODYSSEE de l'INRIA à Sophia-Antipolis notamment Nicolas WOTAWA pour son accueil et Jean Philippe PONS pour ses conseils. Je n'oublie pas et je remercie l'équipe du CERMICS au sein de laquelle cette thèse a débuté et dont les lumières sur certains points de mathématiques se sont montrées utiles. Merci à l'ensemble des personnels administratifs avec qui j'ai été en contact tout au long de ces trois ans et qui ont fait preuve de disponibilité et de bonne humeur dans l'accomplissement de leur tâche. Je pense notamment à Sylvie BERTRE, Kadhija ELOUALI, Marie-Cécile LAFONT, Alice TRAN, Marine DANIEL, Jacques DANIEL et Jean-Louis BOUDOULEC sans oublier une mention spéciale à Gilles MOREAU.

J'adresse mes pensées les plus chaleureuses à l'ensemble des membres du CERTIS dont la liste serait trop longue à détailler mais que je tiens à remercier individuellement pour l'ambiance de travail très amicale qui règne dans ce laboratoire.

J'adresse également toute ma gratitude aux personnes qui ne sont pas citées par manque de place ou par mégarde et qui ont permis, d'une quelconque manière, l'accomplissement de ce travail.

Enfin, tout ceci n'aurait probablement pu aboutir sans le soutien de Nathalie. Je ne peux qu'une fois de plus l'assurer de tout mon amour pour la remercier.

---

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>13</b>
<b>I Problème Direct</b>	<b>25</b>
<b>1 Méthodes pour le problème direct en EEG</b>	<b>27</b>
1.1 Cerveau, activité Électrique et modélisation . . . . .	27
1.1.1 Equations de Maxwell . . . . .	27
1.1.2 L'Approximation quasi-statique . . . . .	28
1.1.3 Loi des courants et problème direct en EEG . . . . .	29
1.1.4 Loi de Biot et Savart et problème direct en MEG . . . . .	29
1.2 Modèles sphériques et solutions analytiques . . . . .	30
1.3 Modèles de têtes réalistes . . . . .	33
1.3.1 La méthode des différences finies (FDM) . . . . .	33
1.3.2 La méthode des éléments finis (FEM) . . . . .	35
1.3.3 La méthode des éléments frontières (BEM) . . . . .	37
<b>2 Une formulation symétrique pour la BEM</b>	<b>43</b>
2.1 Généralités, notations . . . . .	43
2.2 Réécriture de l'équation de Poisson . . . . .	44
2.3 Théorème de représentation . . . . .	44
2.3.1 Prérequis et notations . . . . .	44
2.3.2 Théorème de représentation . . . . .	45
2.3.3 Potentiels simple couche et double couche . . . . .	46
2.4 Formulations intégrales . . . . .	46
2.4.1 Solution homogène . . . . .	47
2.4.2 Approche simple couche . . . . .	48
2.4.3 Approche double couche . . . . .	48
2.4.4 Approche symétrique . . . . .	49
2.5 Discrétisation et implémentation . . . . .	51
2.5.1 Formulation simple couche . . . . .	51
2.5.2 Formulation double couche . . . . .	53
2.5.3 Formulation symétrique . . . . .	53
2.6 Expériences numériques . . . . .	55
2.6.1 Implémentation, mémoire, vitesse . . . . .	56
2.6.2 Cas tests . . . . .	57
2.6.3 Résultats . . . . .	57
2.6.4 Discussion . . . . .	60
2.7 Implémentation complète . . . . .	61
2.7.1 Termes source . . . . .	61

2.7.2	Calcul du potentiel électrique et des signaux EEG . . . . .	62
2.7.3	Calcul du champ magnétique et des signaux MEG . . . . .	63
2.7.4	Matrices de gain . . . . .	64
2.7.5	Discussion . . . . .	64
<b>3</b>	<b>Application à l'estimation de conductivité</b>	<b>67</b>
3.1	Introduction . . . . .	67
3.2	Tomographie par impédance électrique avec la méthode symétrique . . . . .	68
3.2.1	Adaptation de la BEM symétrique au problème direct de l'EIT . . . . .	68
3.2.2	Validation . . . . .	69
3.2.3	Problème inverse en EIT . . . . .	70
3.2.4	Expérimentations numériques . . . . .	72
3.3	Discussion . . . . .	75
<b>II</b>	<b>Problème Inverse</b>	<b>77</b>
<b>4</b>	<b>Introduction</b>	<b>79</b>
4.1	Les sources à estimer . . . . .	79
4.1.1	Dipôle de courant équivalent . . . . .	80
4.1.2	Sources multipolaires . . . . .	80
4.2	EEG et MEG, des visions différentes d'un même phénomène . . . . .	82
4.3	Un problème mal posé . . . . .	83
4.4	Définitions, notations . . . . .	83
4.4.1	Matrice de gain, lead field et forward field . . . . .	83
4.4.2	Modèles spatio-temporels . . . . .	84
<b>5</b>	<b>Etat de l'art des méthodes inverses</b>	<b>87</b>
5.1	Estimation par moindres carrés . . . . .	87
5.2	Méthodes de balayage . . . . .	88
5.2.1	Beamforming . . . . .	89
5.2.2	MUSIC et RAP-MUSIC . . . . .	90
5.3	Méthodes analytiques . . . . .	91
5.3.1	Méthode algébrique . . . . .	92
5.3.2	Approximation méromorphe . . . . .	93
5.4	Méthodes distribuées . . . . .	94
5.4.1	Formulation bayésienne du problème inverse . . . . .	94
5.4.2	Méthodes image linéaires . . . . .	95
5.4.3	Méthodes image non-linéaires . . . . .	96
5.5	Méthodes hybrides . . . . .	97
<b>6</b>	<b>Régularisation d'image par diffusion et minimisation d'énergie</b>	<b>99</b>
<b>7</b>	<b>Problème inverse régularisé par processus de diffusion</b>	<b>105</b>
7.1	Notions de calcul différentiel intrinsèque . . . . .	106
7.2	Approche par discrétisation du gradient . . . . .	107
7.3	Approche par énergie discrétisée . . . . .	110
7.3.1	Discrétisation . . . . .	110
7.3.2	Minimisation . . . . .	111
7.4	Approche par projection sur un convexe . . . . .	112



7.4.1	Discrétisation . . . . .	112
7.4.2	Minimisation . . . . .	113
7.5	Amélioration de la convergence pour le problème inverse de variation totale minimale . . . . .	114
7.5.1	Recherche de pas optimal . . . . .	114
7.5.2	Modifications des algorithmes de gradient . . . . .	115
7.5.3	Gradient projeté . . . . .	117
<b>8</b>	<b>Expériences numériques</b>	<b>119</b>
8.1	Segmentation . . . . .	119
8.2	Implémentation . . . . .	122
8.3	Validation synthétique et comparaison des algorithmes . . . . .	122
8.4	Validation expérimentale . . . . .	129
<b>9</b>	<b>Discussion</b>	<b>135</b>
	<b>Annexes</b>	<b>141</b>
<b>A</b>	<b>Potentiels simple et double couche</b>	<b>143</b>
<b>B</b>	<b>Calcul des opérateurs <math>\mathcal{S}</math>, <math>\mathcal{D}</math>, <math>\mathcal{D}^*</math> et <math>\mathcal{N}</math></b>	<b>145</b>
B.1	Calcul exact de quelques intégrales . . . . .	145
B.1.1	Préliminaires . . . . .	145
B.1.2	Calcul de l'intégrale nécessaire à la discrétisation de $\mathcal{D}$ . . . . .	147
B.1.3	Calcul de l'intégrale nécessaire à la discrétisation de $\mathcal{S}$ . . . . .	149
B.2	Relation entre $\mathcal{N}$ et $\mathcal{S}$ . . . . .	150
<b>C</b>	<b>Calcul du gradient et de la hessienne de <math>J_{\text{smooth}}</math></b>	<b>153</b>
C.1	Calcul du gradient . . . . .	153
C.2	Calcul de la Hessienne . . . . .	153
<b>D</b>	<b>Images de problèmes inverses</b>	<b>155</b>
D.1	Problème inverse MEG . . . . .	155
D.2	Problème inverse EEG . . . . .	188



---

# Introduction



Le cerveau est l'une des structures organisées les plus complexes connues à ce jour. La simple énumération des chiffres suivants permet de s'en rendre compte. Le cerveau est constitué de 1000 milliards de neurones dont 10 milliards sont répartis sur les couches corticales les plus externes. Ces neurones sont reliés entre eux par environ  $10^{12}$  connexions synaptiques mettant en jeu pas moins de  $10^{18}$  neurotransmetteurs à chaque seconde. En tenant compte que ces neurotransmetteurs sont eux même composés de toute une variété d'acides aminés, ce sont environ  $10^{24}$  molécules élémentaires qui participent au traitement de l'information à chaque seconde. Si l'on procède à la comparaison très simplificatrice (et même trop réductrice) d'un cerveau à un ordinateur, l'ordinateur serait une machine d'une capacité de traitement de  $10^{15}$  Gigabits par seconde pesant entre 1 et 2 Kg et consommant entre 10 et 15 watts.

La compréhension de cette complexité et des incroyables fonctionnalités qu'elle engendre est devenue l'un des Graal de la science moderne. Cependant, bien des techniques d'investigation biologique, l'expérimentation *in vivo* en premier lieu, sont difficiles ou bien souvent impossibles sur le cerveau humain. Cela est d'autant plus dommageable que notre cerveau est manifestement le plus "abouti" du règne animal et que son étude est la plus porteuse d'applications. Ces dernières années, les progrès de la physique nous ont apporté bon nombre de moyens nouveaux pour observer le cerveau sans "interférer" avec son fonctionnement. Ces différentes *modalités d'observation* mesurent toutes une grandeur physique dont la variation est une conséquence plus ou moins directe du "fonctionnement des neurones". Il est donc nécessaire d'avoir une compréhension minimale<sup>1</sup> de certains mécanismes neuro-physiologiques de base pour comprendre le fonctionnement et l'intérêt de ces modalités.

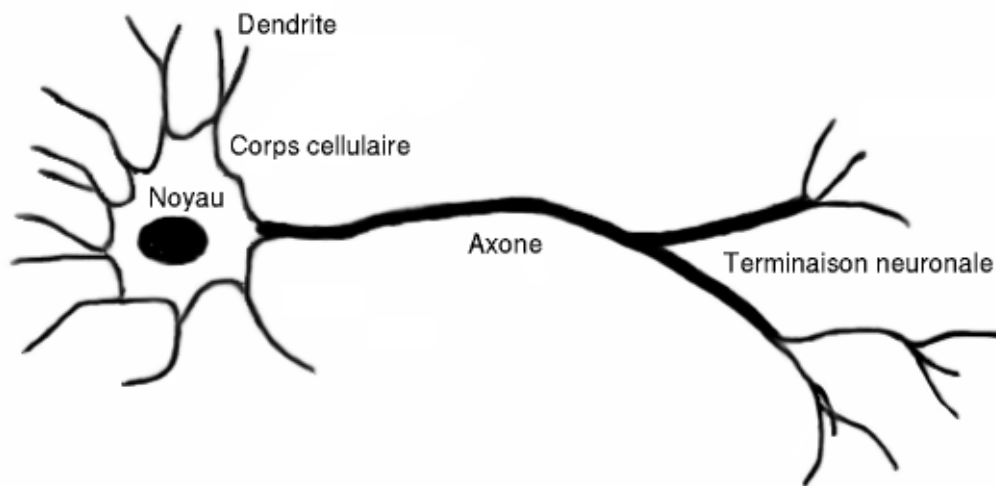


FIG. 1 – Le neurone et ses constituants (source :<http://www.wikipedia.org>)

Les cellules en charge du traitement de l'information au sein du cerveau sont les **neurones**(figure 1). Il s'agit de cellules dont la taille varie de 5 à 150  $\mu\text{m}$ . Ces neurones sont liés les uns aux autres par deux type de prolongements. Les dendrites, tout d'abord, sont les troncs de véritables arborescences. Les dendrites et le corps du neurone reçoivent de très nombreux *contacts synaptiques* venant d'autres neurones et constituent la principale

<sup>1</sup>et très simplifiée

surface de réception du neurone. Chaque neurone possède, de plus, un prolongement d'un diamètre et d'une longueur plus conséquente qui se termine en se ramifiant : il s'agit de l'axone. C'est le principal pôle émetteur du neurone.

Quand un neurone est "au repos", il existe une différence de potentiel électrique entre son

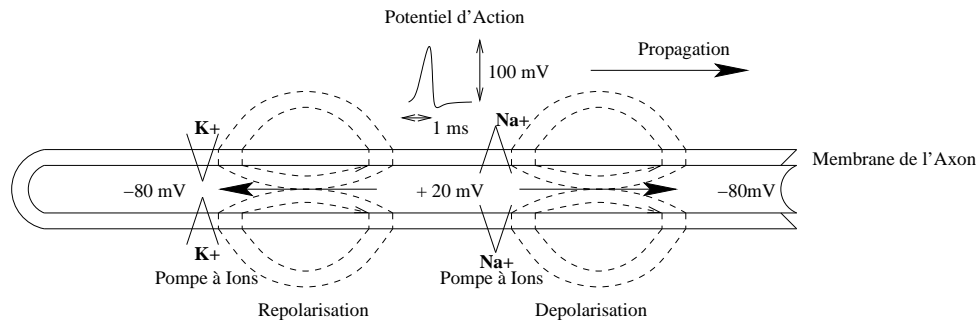


FIG. 2 – Mécanisme ionique de propagation de l'influx nerveux

milieu intra-cellulaire et son milieu extra-cellulaire. Elle est de  $-60\text{mV}$ , l'intérieur présentant le potentiel le plus faible. Ceci est dû à un déséquilibre constant en ions  $K^+$  et  $Na^+$ , entre l'intérieur et l'extérieur de la cellule, qui est maintenu par un mécanisme de pompes à ions<sup>2</sup>. La propagation de l'influx nerveux débute avec l'apparition d'un *potentiel post-synaptique* (PPS). Sous l'action de *neuro-transmetteurs*, la perméabilité de la membrane à certains ions (principalement des ions  $Na^+$  et  $K^+$ ) est altérée et il se produit une accumulation de ces ions dans la cellule. Le potentiel à l'intérieur de la cellule augmente d'une dizaine de millivolts pour une durée d'une dizaine de millisecondes. Plusieurs potentiels post-synaptiques peuvent se cumuler et si l'augmentation de potentiel qu'ils occasionnent localement à l'intérieur de la cellule dépasse une valeur seuil, le neurone entre dans une phase d'émission avec naissance d'un potentiel d'action (PA). La cellule se dépolarise : le potentiel interne passe rapidement de  $-60\text{mV}$  à  $+40\text{mV}$  (ouverture des canaux ioniques) puis se repolarise (après fermeture des canaux ioniques), déclenchant au passage un phénomène similaire dans un voisinage immédiat, assurant ainsi la propagation du signal. La durée de ce phénomène élémentaire est de l'ordre de la milliseconde. Ce PA se propage le long de l'axone et vient exciter ou inhiber<sup>3</sup> d'autres neurones par l'intermédiaire des synapses. Ces dernières constituent une interface chimique permettant d'assurer le relais de l'influx nerveux d'un neurone au suivant. L'ensemble de ce processus physico-chimique nécessite, pour fonctionner, une certaine quantité d'énergie fournie notamment par le cycle d'oxydation de l'ATP.

Le processus très simplifié que nous venons de décrire met en jeu deux types de mécanismes : ceux liés à la propagation électrique de l'influx nerveux d'une part et ceux liés aux réactions chimiques permettant cette propagation d'autre part. Ceci permet d'établir une première grande discrimination entre les modalités d'imagerie cérébrale que nous allons introduire. En effet, la MagnétoEncéphaloGraphie (MEG) et l'ElectroEncéphaloGraphie (EEG) sont à classer parmi les méthodes qui mesurent des grandeurs physiques issues du premier type de mécanisme. Les autres modalités que nous présenterons mesurent toutes, par contre, de manière plus ou moins directe, la concentration d'un composé chimique ou

<sup>2</sup>Il s'agit de grosses molécules organiques situées sur la membrane de la cellule permettant le passage d'ions au travers de celle-ci.

<sup>3</sup>Les potentiels post-synaptiques peuvent en fait être inhibiteurs ou excitateurs suivant qu'ils font diminuer ou augmenter le potentiel de l'intérieur de la cellule.

d'un élément physique intervenant dans les réactions chimiques évoquées dans le second type de mécanismes.

## L'électroencéphalographie (EEG)

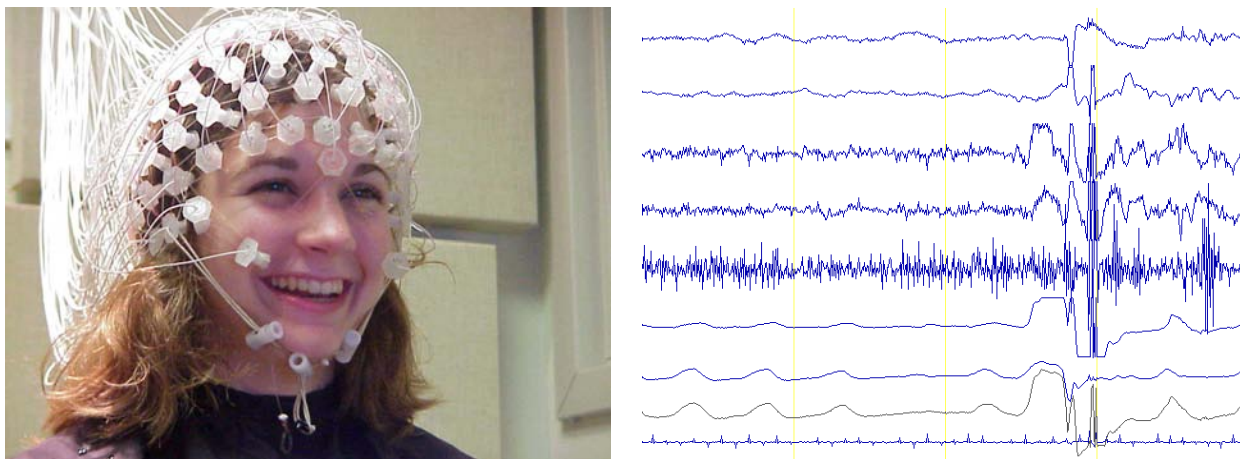


FIG. 3 – Un casque EEG (à gauche) et les signaux enregistrés (à droite).

Il s'agit à la fois de la modalité la plus rudimentaire et de la plus ancienne. C'est en 1875 qu'un médecin anglais enregistra pour la première fois le potentiel électrique d'un cerveau. Ces premières expériences furent menées sur des lapins et des singes à même leur cortex. C'est en 1920 que le physiologiste allemand Hans Berger commença son étude de l'EEG sur l'homme.

Le principe de l'EEG est simple. Il est constitué d'une multitude d'électrodes apposées sur le scalp du patient. Elles sont reliées à un appareil ayant pour fonction d'enregistrer ou d'imprimer la valeur du potentiel électrique en chacune des électrodes. Ce moyen d'observer le cerveau possède l'avantage de présenter un coût très modeste en comparaison des autres modalités que nous présentons et d'être désormais relativement bien connu et maîtrisé. Il souffre cependant de lourdes limitations. Les progrès technologiques n'ont qu'une influence très limitée sur son évolution étant donné que ses possibilités sont bridées pour des raisons physiques. La faible conductivité du crâne diffuse le potentiel électrique généré par l'activité cérébrale, ce qui limite la précision des localisations de sources effectuées en EEG.

## La magnétoencéphalographie (MEG)

Cette technique ayant vu le jour grâce à certains développements récents des sciences physiques, elle est relativement jeune. Ce n'est qu'en 1968 que David Cohen, un physicien du MIT spécialisé dans les blindages magnétiques, enregistra pour la première fois le champ magnétique issu de l'activité cérébrale. Le principal obstacle à l'accomplissement d'une telle tâche réside dans l'extrême faiblesse du signal. Le déplacement des ions durant la propagation de l'influx nerveux produit un champ magnétique dont l'intensité à la surface de la tête est de l'ordre de 100 femtoteslas (soit  $10^{-13}\text{T}$ ). Cette grandeur

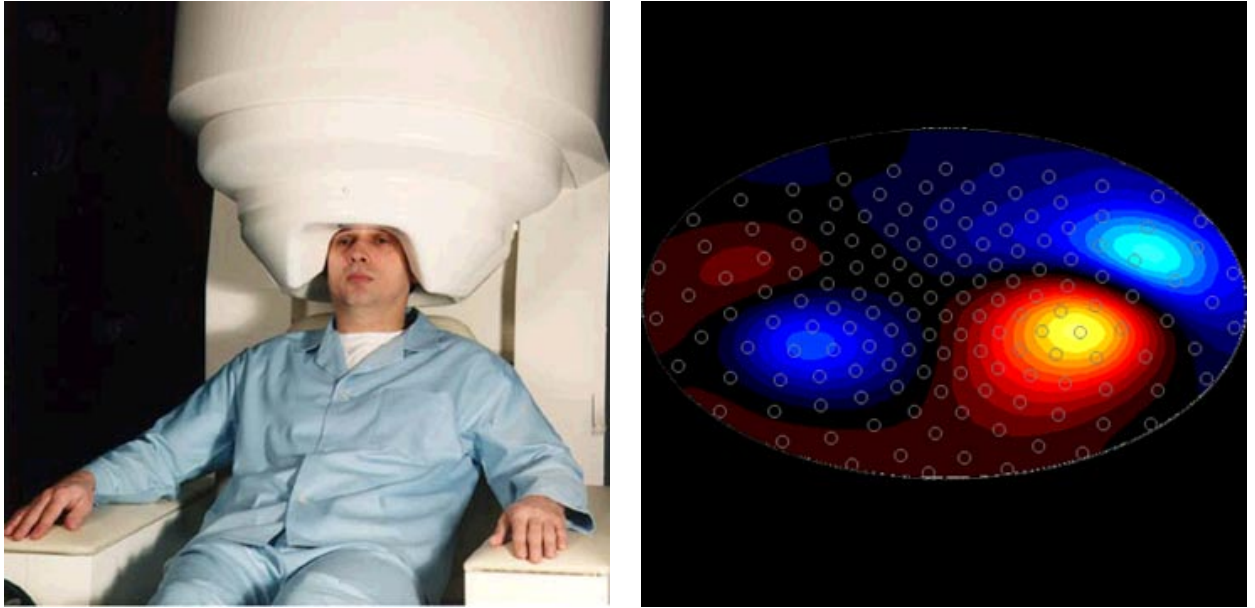


FIG. 4 – Un casque MEG (à gauche) et une représentation des signaux (à droite) (source : *CTF MEG Systems*).

est 10 milliards de fois plus faible que le champs magnétique terrestre. Pour pouvoir surmonter ce problème, il a fallu attendre l'invention du SQUID (Superconducting Quantum Interference Device). Il s'agit d'un dispositif basé sur un effet quantique qui, associé dans une boucle à des matériaux supraconducteurs, permet de détecter d'infimes variations de champ magnétique. [126][54]. Ces capteurs à base de SQUIDS sont plongés dans un cryostat rempli d'hélium liquide à  $-269^{\circ}\text{C}$ , d'où les dimensions imposantes du casque de la MEG (fig.4).

Les champs magnétiques que l'on cherche à mesurer en MEG étant très faibles, on utilise simultanément plusieurs techniques de blindage pour s'affranchir du bruit dû aux sources extérieures. Bien souvent les capteurs sont composés de deux bobinages empilés ou juxtaposés. Il s'agit alors de gradiomètres. Cela a pour effet de mesurer non plus le champs magnétique absolu mais son gradient dans une certaine direction. Les sources de bruit étant les plus lointaines, ce sont celles dont l'intensité décroît spatialement la moins vite et dont l'atténuation sera la plus forte par ce procédé. Un autre moyen très répandu pour se prémunir du bruit extérieur réside dans l'utilisation de capteurs de référence servant à mesurer le champ environnant loin de la tête. Enfin et surtout, la protection la plus efficace est assurée par l'utilisation d'une chambre blindée en  $\mu$ -métal<sup>4</sup> pour abriter le système de mesure.

La MEG est une technique très coûteuse tant à l'achat (chambre blindée) qu'à l'entretien (hélium liquide). L'utilisation simultanée d'un EEG est possible et contrairement à ce dernier, les prochaines avancées en physique et en technologie devraient vraisemblablement faire progresser les possibilités de cette modalité. Les systèmes MEG actuels

<sup>4</sup>un alliage constitué de nickel, de fer, cuivre et de molybdène.



possèdent de 50 à 200 capteurs permettant chacun de capturer une composante (radiale en général) du champ magnétique. Cette limitation pourrait disparaître dans les années à venir et le nombre de capteurs augmenter.

### La Tomographie à émission de Positrons (TEP)

La TEP est une modalité d'imagerie récente, invasive et peu répandue. Son invention remonte à 1973 quand Edward J. Hoffman and Michael Phelps développèrent le premier scanner TEP destiné à l'homme, à l'université Washington, à Saint-Louis. Cette technique consiste à injecter au sujet un marqueur radioactif  $\beta_+$  c'est à dire émettant des positrons. Les plus utilisés sont le carbone-11, l'azote-13, l'oxygène-15, et le fluor-18 et sont en général incorporés dans une molécule impliquée dans le métabolisme (le glucose par exemple). Le marqueur, une fois injecté se répand dans la zone de l'organisme à imager. Il est alors possible de détecter la localisation et la concentration du marqueur grâce aux émissions gamma que sa radioactivité déclenche. Les positrons émis par le marqueur ont un libre parcours moyen de quelques millimètres dans l'organisme avant de se désintégrer au contact d'un électron et de créer deux photons gamma émis avec des directions opposées à  $180^\circ$ . Ces photons sont alors recueillis par un matériau scintillant<sup>5</sup> et détectés par des tubes photomultiplicateurs qui amplifient la décharge de lumière ainsi créée. Le point-clé réside ici dans la détection de paires de photons cohérentes issues d'une même désintégration. En pratique, cela est fait en permettant un écart maximal de quelques nanosecondes entre la détection des deux photons d'une paire. Un procédé de reconstruction tomographique permet ensuite de déterminer le lieu et la concentration des marqueurs. Cette technique

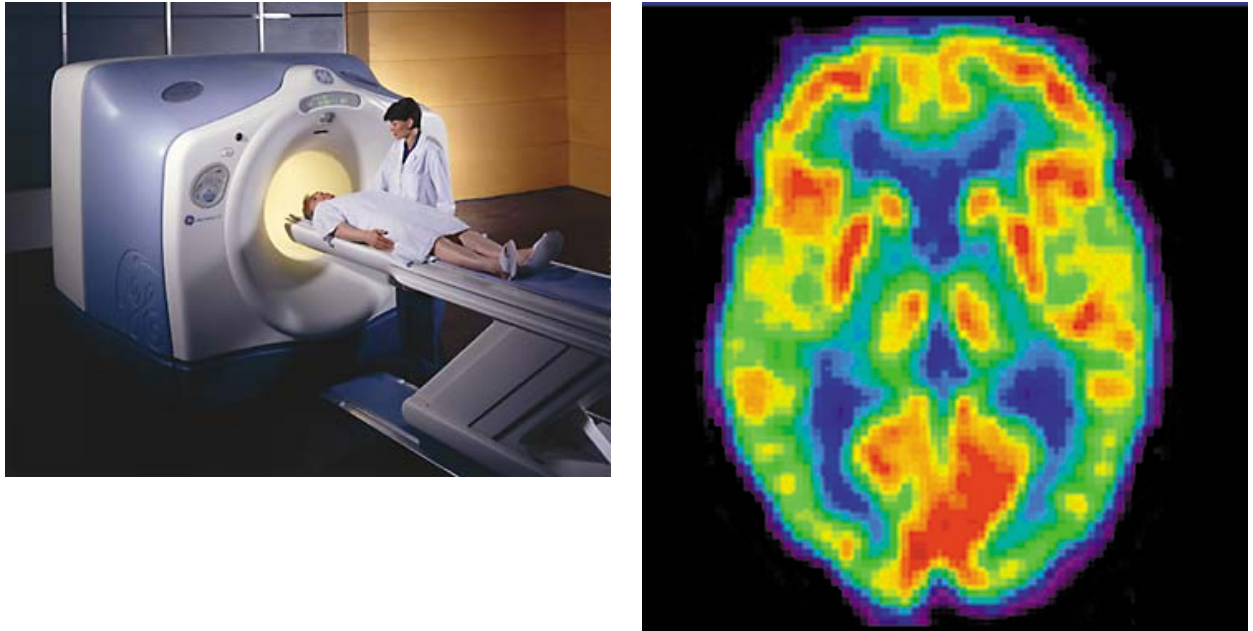


FIG. 5 – Un scanner TEP (à gauche) et une image (à droite) (source : *Hartford Hospital*).

d'imagerie présente la particularité de pouvoir imager des composés métaboliques et non structuraux. C'est la raison pour laquelle cette technique, bien qu'utilisée également à des

<sup>5</sup>un matériau qui transforme le rayonnement gamma en lumière visible.

fins expérimentales en recherche, est essentiellement employée à des fins cliniques notamment pour la détection et le suivi de certaines tumeurs. Le développement et l'expansion de cette modalité sont grandement freinés par ses deux principaux inconvénients : d'une part, cette méthode est fortement invasive de par l'injection d'isotopes radio-actifs dans le corps du patient (même si leur demi-vie excède rarement la journée). D'autre part, en plus d'être cher à l'installation, un scanner TEP nécessite, pour fonctionner, d'être proche d'un cyclotron<sup>6</sup> pour produire les isotopes dont la durée de demi-vie ne permet pas le transport.

### L'imagerie par résonance magnétique (IRM)

L'IRM est la méthode d'imagerie la plus récente et la plus sophistiquée. C'est en 1946 que Felix Bloch et Edward Purcell découvrirent le phénomène de résonance magnétique nucléaire (RMN) qui est à la base de ce procédé d'imagerie. Richard Ernst proposa le concept d'imagerie par résonance magnétique et en jeta les bases théoriques en 1975. Enfin, c'est en 1980 que l'équipe de Edelstein produisit la première IRM du corps humain. Le phénomène de RMN est basé sur le moment magnétique des atomes<sup>7</sup>.

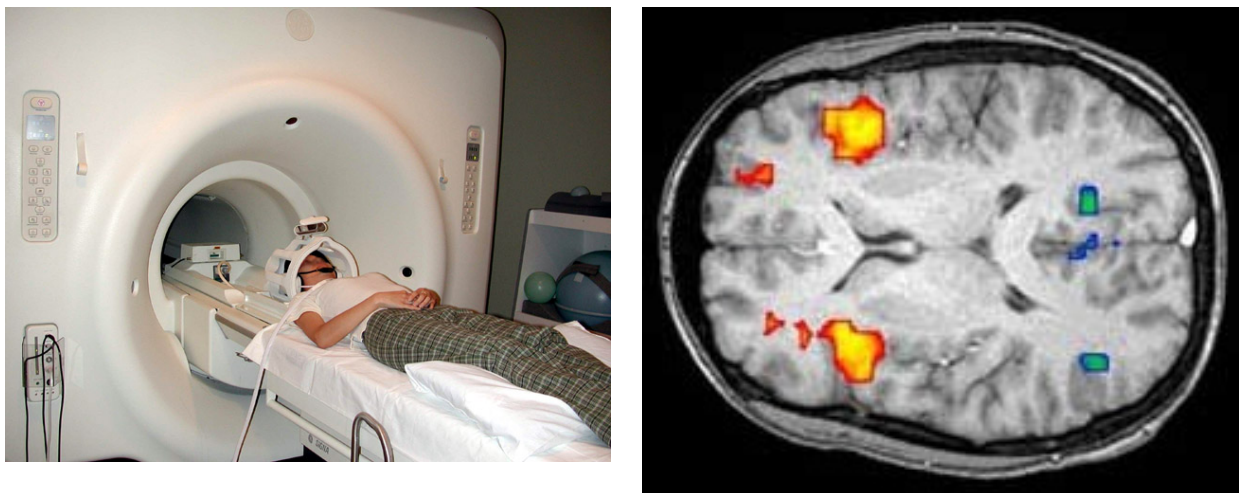


FIG. 6 – Un scanner IRM (à gauche) et une image (à droite) (source : *University of Florida*).

La plupart des éléments chimiques possède un isotope en quantité suffisamment abondante dont le noyau est magnétique. Dans les tissus vivants on trouve par exemple, en quantité abondante, les noyaux magnétiques de  $H^1$ ,  $C^{13}$ ,  $Na^{23}$ ,  $P^{31}$  et  $K^{39}$ . Nous nous plaçons, dans le cas le plus utilisé : celui du noyau d'hydrogène (un proton).

Le sujet est placé à l'intérieur d'un aimant<sup>8</sup> extrêmement puissant<sup>9</sup> en fonctionnement permanent. Sous l'action de ce champ magnétique statique très intense, une très faible proportion de noyaux<sup>10</sup> voient leur moment magnétique s'aligner sur ce champ. Un second

<sup>6</sup>un accélérateur de particules

<sup>7</sup>en physique quantique, on parle de *spin*.

<sup>8</sup>cette cavité cylindrique, que l'on voit sur toutes les images

<sup>9</sup>la puissance est équivalente, voire supérieur, aux aimants utilisés pour soulever les voitures dans les casses !

<sup>10</sup>environ un sur un million !

champ magnétique, alternatif se situant dans les fréquences radio, est ensuite ajouté. Ce champ, dit excitateur, fait entrer en oscillation (en *résonance*) les moments magnétiques des noyaux alignés autour de la direction d'alignement. La fréquence de résonance dépend des types de noyaux que l'on souhaite exciter (dans notre cas, les noyaux d'hydrogène) et de l'intensité du champ statique. Les noyaux ainsi excités passent dans un état dit de haute énergie. Le champ excitateur est alors brusquement interrompu. Les atomes de haute énergie repassent alors à un état d'équilibre en émettant des ondes à la fréquence de résonance. Ces dernières sont recueillies par une antenne (plus précisément un tableau d'antennes) située près de la partie du corps à imager.

La localisation spatiale est assurée à travers un système d'encodage spatial basé sur des gradients de champs magnétiques. Le traitement de ces données est ensuite assuré (entre autres) grâce à des transformées de Fourier. Nous n'entrons pas dans ces détails qui dépassent de beaucoup la partie introductive du présent document. Il existe cependant bon nombre d'ouvrages consacrés exclusivement au fonctionnement et aux séquences d'IRM[71].

Suivant les types de séquences utilisées, l'IRM peut produire deux principaux types d'image de la tête et du cerveau. Les images anatomiques apportent une image 3D de la densité d'eau présente. Elles permettent, après segmentation, d'obtenir des modèles 3D réalistes de la tête de chaque sujet en discernant chacun des milieux. Les images fonctionnelles, quant à elles, permettent d'imager la concentration d'oxygène dans le sang. Elles fournissent des images 3D permettant de localiser une activité cérébrale par la consommation d'oxygène qu'elle occasionne. Ces deux types d'images possèdent une résolution spatiale de l'ordre du millimètre, le temps d'acquisition de chaque image variant de une à dix secondes.

Cette modalité est très prisée d'un point de vue clinique car elle fournit des images de très bonne qualité facilitant grandement les diagnostics. Concernant l'étude du cerveau, l'enthousiasme est à modérer car il manque à ce formidable outil, une bonne résolution temporelle. L'IRM fournit néanmoins la meilleure précision spatiale en terme d'imagerie fonctionnelle.

Un autre inconvénient de l'IRM est qu'elle nécessite un équipement très coûteux tant à l'achat qu'à l'entretien. Sa grande utilité clinique (en comparaison de la MEG par exemple) lui assure cependant un bon taux d'équipement dans les hôpitaux. En outre, l'IRM ne peut pas être pratiquée sur des sujets présentant des implants métalliques ou électroniques (comme un pacemaker par exemple).

Les modalités d'observation du cerveau que nous venons de passer en revue sont les principaux moyens d'en observer l'activité. On parle d'imagerie fonctionnelle. Il existe d'autres modalités d'observation du cerveau dites anatomiques comme l'IRM anatomique que nous venons d'évoquer. On pourra citer de manière non exhaustive, en plus de cet exemple, l'imagerie de tenseur de diffusion et la tomographie calculée. Ces techniques sont très utiles en environnement clinique pour déceler d'éventuels défauts structuraux du cerveau et, dans le domaine de la recherche, pour créer des modèles 3D de la tête d'un sujet avec une précision millimétrique.

L'imagerie fonctionnelle du cerveau est encore relativement peu utilisée dans les applications cliniques et seule l'étude de certaines pathologies y fait régulièrement appel. L'utilisation encore balbutiante de ces techniques en milieu clinique est aussi certainement due à notre connaissance très incomplète des mécanismes fonctionnels cérébraux. Les unités de recherche en médecine et en neurosciences sont donc logiquement beaucoup plus

utilisatrices de ces équipements.

Comme nous l'avons évoqué précédemment, la MEG et, dans une moindre mesure, l'EEG sont deux techniques d'observation du cerveau suscitant un véritable engouement dans la communauté des neurosciences. Cela est dû à leur excellente résolution temporelle qui est la meilleure parmi toute les méthodes d'imagerie fonctionnelle du cerveau. Ces modalités sont porteuses de recherches actives et diverses, toutes gravitant d'une façon plus ou moins immédiate autour de la reconstruction de sources. Cette reconstruction est connue sous le nom de *problème inverse* et consiste à déterminer le plus précisément possible la nature et le lieu de l'activité électrique cérébrale expliquant des relevés MEG ou EEG.

La résolution du problème inverse est très souvent menée de manière itérative à la recherche d'une source expliquant les données observées. Il est alors capital de pouvoir modéliser, avec la plus grande précision possible, les mesures MEG et EEG générées par une source donnée. Il s'agit du *problème direct*.

La précision des modèles mis en oeuvre dans le problème direct est fortement dépendante de paramètres physiques comme la précision des modèles géométriques de la tête ou les valeurs des conductivités des différents milieux composant la tête. L'estimation de ces paramètres constitue donc un prérequis indispensable pour une estimation précise des sources. Nous nous intéresserons plus particulièrement à l'estimation des conductivités.

Le présent manuscrit remonte le chemin du problème direct jusqu'au problème inverse. Il est articulé comme suit :

La première partie de ce manuscrit est consacrée au problème direct. Un état de l'art détaillé figure dans le premier chapitre. Dans le deuxième chapitre, j'expose ma contribution au sujet par la mise au point d'une nouvelle méthode d'éléments frontière. Ces développements sont le fruit d'une collaboration avec Jan KYBIC et Maureen CLERC sur des travaux qu'ils ont initiés. Ils ont donné lieu à la publication [1] à la conférence IPMI 2003.

La nouvelle formulation proposée, à base d'éléments frontière, se base sur un théorème de représentation faisant intervenir quatre opérateurs intégrals. A l'aide de ce théorème, un système intégral est obtenu. Ses inconnues sont le potentiel électrique et sa dérivée normale sur chacune des interfaces du modèle de tête à couches imbriquées utilisé. Le système ainsi obtenu est symétrique et bloc-diagonal, chaque interface n'interagissant qu'avec ses deux voisines immédiates. Il est également montré comment le même théorème de représentation permet d'aboutir à la seule formulation par éléments frontière connue jusqu'alors en EEG ou à une troisième formulation.

Une étude détaillée de la discrétisation est effectuée pour les trois méthodes en soulignant la discrétisation mixte P0/P1 mise en oeuvre pour la méthode symétrique. Un soin particulier est apporté à la discrétisation des quatre opérateurs évoqués.

Une partie expérimentale compare la précision des trois méthodes sur deux modèles de tête sphérique. Sur un modèle à trois couches, la méthode symétrique se montre notablement plus précise que ses deux homologues. Cet écart est particulièrement mis en évidence pour deux situations dans lesquelles la méthode d'éléments frontière utilisée traditionnellement en EEG montre ses limites de précision :

- lorsqu'une source est proche d'une interface
- lorsque des grands écarts de conductivité caractérisent les différents milieux de la tête.

Certains points cruciaux de l'implémentations sont décrits notamment le calcul des termes source dans des cas classiques, le calcul du champs magnétique et l'obtention de données MEG et EEG à partir de coordonnées de capteurs. Des temps de calcul sont fournis et

mon implémentation de la méthode symétrique devrait être prochainement rendue disponible gratuitement sur internet.

A la fin de la première partie, le troisième chapitre est consacré à mes travaux sur l'estimation de conductivité. J'y expose le fruit de ma collaboration avec Maureen CLERC sur une application de la nouvelle méthode d'éléments frontière au problème de la tomographie par impédance électrique (EIT). Ces travaux ont été exposés à la conférence NFSI 2005 [23] et dans [24].

La formulation symétrique de la méthode d'éléments frontière est le fondement de ce travail et l'utilisation d'un modèle de tête réaliste à couches imbriquées y est reprise. L'inconnue supplémentaire introduite dans cette formulation permet une modélisation immédiate du courant injecté en EIT. Sont ensuite détaillées les modifications mineures apportées au problème direct en EEG pour pouvoir calculer les mesures EEG étant donné un courant d'injection et des valeurs pour les conductivités des différentes couches. C'est le problème direct en EIT. Il est, en outre, montré qu'aucun assemblage de matrice supplémentaire n'est nécessaire à ce calcul. Il suffit de multiplier des blocs de la matrice du problème direct en EEG par des scalaires.

Deux algorithmes de problème inverse en EIT basés sur des moindres carrés sont ensuite proposés. Le premier permet d'estimer les conductivités en connaissant la valeur du courant d'injection. Le second permet d'estimer simultanément le courant d'injection et les conductivités à un facteur multiplicatif commun près, ce qui est suffisant dans les applications. Ce dernier algorithme a été développé pour pouvoir estimer les conductivités lorsque le courant d'injection ne peut être mesuré de manière précise.

Des tests synthétiques permettent de valider les deux algorithmes. Une série d'expériences permet de retrouver des valeurs de conductivité similaires à celles observées lors des travaux les plus récents en estimation de conductivité in vivo.

Le problème inverse est l'objet de la seconde partie de ce mémoire. Elle débute au chapitre quatre avec l'introduction de quelques notions fondamentales de ce thème. Dans le chapitre suivant, un état de l'art détaillé est effectué. Des notions de bases de traitement d'image sont présentées au chapitre six. Ces notions permettent l'introduction du chapitre sept dans lequel je présente mes travaux sur le problème inverse. Ces derniers ont été publiés aux conférences NFSI 2003 [3] et BEM-NFSI 2005 [2].

Le problème inverse y est traité comme un problème de restauration d'image. La source à reconstruire est une image d'activation définie sur la surface du cortex  $S$ . La reconstruction est opérée par la minimisation d'une fonctionnelle qui s'écrit comme la somme d'un terme d'attache aux données modélisant la partie physique du problème et d'une énergie de régularisation. Ce dernier terme s'écrit sous la forme  $\int_S \phi(|I(\mathbf{x})|) dS(\mathbf{x})$  et donne naissance, lors de sa minimisation, à un processus de diffusion. La fonction  $\phi$  détermine la nature isotrope ou le type d'anisotropie de ce processus.

Trois algorithmes sont proposés pour le calcul effectif de la solution inverse dans ce cadre :

- un algorithme de gradient dont la convergence est garantie dès que  $\phi(\sqrt{x})$  est convexe et  $C^2$ . La convergence numérique semble cependant avoir lieu pour des fonctions  $\phi$  ne vérifiant pas cette hypothèse notamment  $\phi(x) = x$  correspondant à la solution de variation totale minimale.
- un algorithme de type Newton dont la convergence est assurée avec la même hypothèse que pour l'algorithme précédent. Les expériences numériques montrent que



cette hypothèse semble nécessaire.

- un algorithme dédié à la reconstruction de variation totale minimale. Sa convergence a été démontrée dans des travaux antérieurs.

Nous proposons, sans preuve de convergence, plusieurs modifications applicables aux algorithmes de gradient pour en accélérer la convergence dans le cas de la solution de variation totale minimale.

Dans le chapitre huit, une partie expérimentale s'appuyant sur des géométries réalistes est présentée. L'accélération occasionnée par les modifications proposées y est testée. Une validation de l'algorithme de gradient est établie sur une expérience de somatotopie en MEG. Enfin l'utilisation de données synthétiques permet de comparer entre elles trois méthodes de reconstructions. Deux d'entre elles sont linéaires : la reconstruction de norme minimale qui sert de référence standard et la reconstruction à l'aide de diffusion isotrope. La troisième est la reconstruction de variation totale minimale. Ces méthodes sont testées sur deux types de sources différentes, en MEG et en EEG, avec différents niveaux de bruits. Les résultats montrent un avantage qualitatif et quantitatif notable en faveur de la reconstruction de variation totale minimale.

Le neuvième et dernier chapitre, enfin, est le lieu d'une discussion à propos du travail accompli sur le problème inverse. J'y fait également quelques propositions sur les directions à suivre pour le prolongement de ces travaux.





---

# Première partie

## Problème Direct



---

# Chapitre 1

## Méthodes pour le problème direct en EEG

### 1.1 Cerveau, activité Électrique et modélisation

Comme nous l'avons évoqué dans l'introduction, le cerveau est le siège d'une activité électrique mesurable depuis l'extérieur de la tête. Le problème direct consiste à simuler à partir d'une source de courant donnée le potentiel électrique généré à la surface de la tête dans le cas de l'EEG ou le champ magnétique généré à l'extérieur de la tête dans le cas de la MEG. Le principal intérêt du problème direct est qu'il est nécessaire à la quasi-totalité des méthodes inverses et qu'il en conditionne en partie la précision. Il existe plusieurs méthodes pour résoudre ce problème. Toutes reposent sur la même modélisation physique que nous décrivons ici.

#### 1.1.1 Equations de Maxwell

Comme pour tous les problèmes d'électromagnétisme, on part des équations de Maxwell :

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} & \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 & \nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0 \left( \mathbf{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right)\end{aligned}\tag{1.1}$$

$\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$  représentent respectivement le *champ électrique* et le *champ magnétique*.  $\epsilon_0 \approx 8.85 \cdot 10^{-12} \text{ Fm}^{-1}$  est la *permittivité électrique* du vide et  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Hm}^{-1}$  est la *perméabilité magnétique* du vide. La perméabilité magnétique des tissus qui constituent la tête est identique à celle du vide.

La relation entre la *densité de courant*  $\mathbf{J}$  et la *densité de charge*  $\rho$  est donnée par :

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

De plus, dans un milieu amagnétique exempt de charge ou de générateur de courant,  $\mathbf{J}$  est la somme d'un *courant ohmique volumique* et d'un *courant de polarisation* :

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}\tag{1.2}$$

$\mathbf{P} = (\epsilon - \epsilon_0)\mathbf{E}$  est le vecteur de polarisation.  $\sigma^1$  et  $\epsilon$  désignent respectivement la conductivité et la permittivité du milieu.

### 1.1.2 L'Approximation quasi-statique

Cette approximation consiste à négliger toutes les dérivées temporelles intervenant dans les équations de Maxwell. En suivant la démarche de [54], nous justifions sa validité en considérant quelques ordres de grandeur.

Pour les tissus du cerveau, on a  $\epsilon = 10^5 \epsilon_0$  et  $\sigma \approx 0.3 \Omega^{-1} m^{-1}$ . Nous nous plaçons dans une gamme de fréquences de 0 à 1000 Hz, ce qui correspond au domaine de fréquence des phénomènes électriques que l'on souhaite mesurer en MEEG.

Tout d'abord, il faut vérifier que  $\|\epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\| \ll \|\sigma \mathbf{E}\|$ . Pour ce faire, on décompose le champ électrique dans le domaine des fréquences et l'on considère une onde plane du type  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0(\mathbf{r})e^{2\pi j f t}$  où  $\mathbf{E}_0(\mathbf{r})$  est un vecteur d'amplitude réelle. La première hypothèse que nous devons vérifier valide revient à vérifier que  $\kappa = |2\pi f \epsilon / \sigma| \ll 1$ . Dans notre cas  $\kappa \approx 2.10^{-3}$ , ce qui est concluant.

La seconde hypothèse que l'on doit valider est que  $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ . Pour y parvenir, on considère la même onde plane que précédemment et on suppose, de plus, qu'elle est transverse. Elle vérifie donc  $\mathbf{E}_0(\mathbf{r}) = \mathbf{G}e^{2\pi j \mathbf{F} \cdot \mathbf{r}}$  avec  $\mathbf{G}$  vecteur constant vérifiant  $\mathbf{F} \cdot \mathbf{G} = 0$ . Comme  $\nabla \cdot \mathbf{E}_0(\mathbf{r}) = 2\pi j (\mathbf{F} \cdot \mathbf{G})e^{2\pi j \mathbf{F} \cdot \mathbf{r}} = 0$ , on a

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E}_0(\mathbf{r}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{E}_0(\mathbf{r})) - \Delta \mathbf{E}_0(\mathbf{r}) = -\Delta \mathbf{E}_0(\mathbf{r})$$

et donc

$$\|\Delta \mathbf{E}_0(\mathbf{r})\| = 2\pi f \mu_0 \sigma \|\mathbf{E}_0(\mathbf{r})\|.$$

$\mathbf{E}_0(\mathbf{r})$  est donc impliqué dans un phénomène oscillatoire présentant une longueur d'onde spatiale de  $\sqrt{\frac{2\pi}{2\pi f \mu_0 \sigma}}$ . Dans le cas présent, cela fournit une longueur d'onde d'environ 500 mètres. Les dimensions de la tête étant petites devant ce grandeur, on peut négliger ces variations. Cela achève la justification de l'approximation quasi-statique.

L'approximation quasi-statique étant légitimée, intéressons-nous maintenant à ses conséquences. La seconde équation de Maxwell montre que le champ électrique est à rotationnel nul ce qui revient à écrire que le champ électrique dérive d'un *potentiel électrique* scalaire  $V$ . Cette équation est donc équivalente à

$$\mathbf{E} = -\nabla V$$

De même, la troisième équation de Maxwell devient

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$$

qui, combinée à la quatrième équation de Maxwell à l'aide de la formule de Stokes, devient la loi de Biot-Savart qui permet de calculer le champ magnétique en tout point de l'espace  $\mathbf{r}$  à partir de la densité de courant  $\mathbf{J}$ .

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\Omega} \mathbf{J}(\mathbf{r}') \times \nabla' \left( \frac{1}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} \right) d\mathbf{r}' \quad (1.3)$$

---

<sup>1</sup>unité  $\Omega^{-1} m^{-1}$

### 1.1.3 Loi des courants et problème direct en EEG

Bien que le terme de polarisation soit nul dans l'équation (1.2), grâce à l'approximation quasi-statique, cette loi des courants doit être modifiée pour tenir compte du fait que le cerveau n'est pas un milieu passif mais le lieu d'une activité électrique donnant naissance à des *courants primaires* notés  $\mathbf{J}^p$ . Il faut donc écrire :

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}) = \mathbf{J}^p(\mathbf{r}) + \sigma(\mathbf{r})\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{J}^p(\mathbf{r}) - \sigma(\mathbf{r})\nabla V(\mathbf{r}) \quad (1.4)$$

Cette notion de courants primaires est très importante car c'est précisément ce que l'on cherche à estimer dans les problèmes inverses en MEG et en EEG.

Si l'on considère la quatrième équation de Maxwell  $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$ , que l'on prend la divergence de part et d'autre de l'équation, et qu'on utilise le fait que  $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) = 0$ , on obtient une équation aux dérivées partielles (EDP) de type Poisson liant les courants primaires  $\mathbf{J}^p$ , le potentiel électrique  $V$  et la conductivité  $\sigma$  :

$$\nabla \cdot (\sigma \nabla V) = \nabla \cdot \mathbf{J}^p \quad (1.5)$$

Le problème direct en EEG revient donc à résoudre pour  $V$  l'EDP (1.5) étant donnés  $\sigma$  et  $\mathbf{J}^p$ .

### 1.1.4 Loi de Biot et Savart et problème direct en MEG

En réinjectant la décomposition de  $\mathbf{J}$  (1.4) dans l'équation de Biot-Savart (1.3), on obtient :

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mathbf{B}_0(\mathbf{r}) - \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\Omega} \sigma(\mathbf{r}') \nabla' V \times \nabla' \left( \frac{1}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} \right) d\mathbf{r}' \quad (1.6)$$

où  $\mathbf{B}_0(\mathbf{r})$  est le champ magnétique produit par  $\mathbf{J}^p$  dans le vide

$$\mathbf{B}_0(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\Omega} \mathbf{J}^p(\mathbf{r}') \times \nabla' \left( \frac{1}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} \right) d\mathbf{r}' \quad (1.7)$$

On peut montrer que (1.6) est équivalente à l'équation :

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mathbf{B}_0(\mathbf{r}) + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\Omega} V(\mathbf{r}') \nabla' \sigma \times \nabla' \left( \frac{1}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} \right) d\mathbf{r}' \quad (1.8)$$

L'équation (1.6) fournit un moyen de calculer le champ magnétique en fonction de la conductivité, des courants primaires et du potentiel correspondant  $V$ . Cette relation étant explicite, il n'y a pas d'équation à résoudre. La plupart des techniques de résolution du problème direct en MEEG calculent d'abord le potentiel électrique à partir de l'équation (1.5) et en déduisent le champ magnétique grâce à l'équation (1.6). A titre d'exception, on peut citer, par exemple, les travaux menés dans [117] qui visent à isoler le problème direct en MEG de la très forte dépendance du potentiel électrique vis à vis des valeurs des conductivités. En adoptant cette approche, la précision du problème direct en MEG est fortement dépendante de la précision du problème direct en EEG. C'est aussi la raison pour laquelle nous portons une attention plus particulière au calcul du potentiel dans notre étude du problème direct, le calcul du champ magnétique à partir de ce dernier étant détaillé pour les méthodes d'éléments frontières en 2.7.3.

Suite aux considérations précédentes, le problème direct peut être développé dans le cadre assez simple de l'électrostatique (en comparaison à d'autres régimes des équations

de l'électromagnétisme). Toutes les techniques de calcul du problème direct en EEG reposent sur l'équation (1.5) à laquelle on adjoint éventuellement l'équation (1.6) pour la MEG. Elles diffèrent à la fois par le modèle géométrique de tête qu'elles utilisent (et les hypothèses physiques afférentes) et par le mode de discrétisation de cette équation pour ce modèle. Nous avons choisi de les diviser en quatre classes que nous exposons plus ou moins brièvement suivant leur importance dans le reste de cet exposé.

## 1.2 Modèles sphériques et solutions analytiques

Le modèle sphérique a été introduit au cours des années 60 lorsque les scientifiques s'intéressèrent au calcul du potentiel électrique à la surface de la tête. Ce type de modèle fut introduit pour simplifier les calculs et malgré ses approximations grossières, c'est encore le plus utilisé de nos jours. On peut notamment citer les travaux de Rush et Driscoll qui furent les premiers à introduire un modèle à trois couches concentriques [101].

Dans ce modèle (figure 1.1), la tête est assimilée à un ensemble de  $N$  sphères concentriques

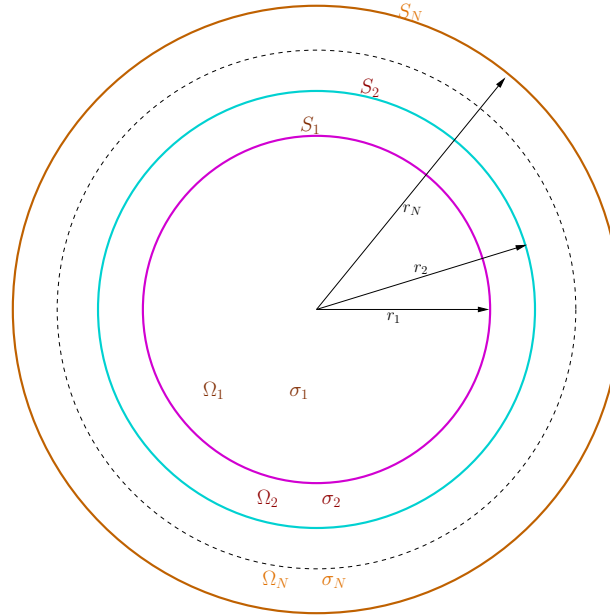


FIG. 1.1 – Modèle de tête sphérique

$S_1, \dots, S_N$ , chacune étant censée représenter l'interface entre deux milieux différents de la tête. Le milieu compris entre  $S_k$  et  $S_{k+1}$  est noté  $\Omega_{k+1}$  et présente une conductivité constante et isotrope notée  $\sigma_{k+1}$ . Notons que  $\Omega_{N+1}$  représente l'extérieur de la tête et la conductivité de l'air étant nulle, on a  $\sigma_{N+1} = 0$ . Le rayon de chaque sphère  $S_k$  est noté  $r_k$ .

Beaucoup d'études ont été menées sur des modèles sphériques pouvant se mettre sous la forme précédente. Ces derniers ont mis en évidence l'influence des conductivités (notamment celle de la couche représentant le crâne) et des rayons des interfaces sur le calcul du potentiel. Les modèles sphériques ont principalement été associés dans la littérature à des sources dipolaires ponctuelles (cf 4.1). Dans ce qui suit, nous détaillons en suivant [56] l'ensemble des équations régissant notre modèle sphérique pour ce type de source.

On note  $(x_0, y_0, z_0)$  la position du dipôle et  $(m_x, m_y, m_z)$  son moment. On suppose de plus que le dipôle se situe dans  $\Omega_1$ . Dans un premier temps, on procède à un changement de

repère de sorte à amener ce dipôle dans une configuration canonique telle que sa position soit dans le plan  $xOz$  et que son moment soit suivant l'axe  $Oz$ . Cela se fait à l'aide de la composée de trois rotations d'angles  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  (pour leurs définitions, se reporter à [56]). La matrice de cette transformation s'écrit

$$T = \begin{bmatrix} \cos \beta \cos \gamma & \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma + \cos \alpha \sin \gamma & -\cos \alpha \sin \beta \cos \gamma + \sin \alpha \sin \gamma \\ -\cos \beta \sin \gamma & -\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma + \cos \alpha \cos \gamma & \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma + \sin \alpha \cos \gamma \\ \sin \beta & -\sin \alpha \cos \beta & \cos \alpha \cos \beta \end{bmatrix}$$

Après cette transformation, on peut supposer que le dipôle est situé à  $\mathbf{p} = (x_0, 0, z_0)'$  et possède un moment  $\mathbf{q} = (0, 0, q_0)'$ .

La démarche que l'on suit ensuite pour résoudre l'équation (1.5) est typique de ce genre de problèmes et sera également utilisée dans les approches d'éléments frontières. On écrit la solution  $V$  comme la somme d'une partie singulière  $v$  tenant compte du terme source et d'une partie régulière  $u$  assurant le respect des conditions de continuité aux interfaces. Ces deux parties sont décomposées sur des bases d'harmoniques sphériques permettant de tirer parti de la symétrie du problème et d'établir des formules analytiques.

**Partie Régulière** Il s'agit d'une solution de l'équation homogène associée à (1.5). Elle doit donc vérifier

$$\sigma_i \Delta u = 0 \quad \text{dans } \Omega_i, \forall i = 1 \dots N+1.$$

On réécrit le Laplacien en coordonnées sphériques

$$\Delta \Phi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2}.$$

On cherche des solutions sous forme séparable :

$$\Phi(r, \theta, \phi) = f(r)g(\theta)h(\phi).$$

On montre ensuite qu'une telle solution s'écrit sous la forme

$$\begin{cases} f(r) = \alpha_l r^{-(l+1)} + \beta_l r^l \\ g(\theta) = P_l^m(\cos \theta) \\ h(\phi) = A_l^m \cos(m\phi) + B_l^m \sin(m\phi). \end{cases} \quad (l, m) \in \mathbb{N}^2$$

Avec ces notations, la forme générale d'une fonction harmonique  $\Phi$  est

$$\Phi(r, \theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^l (\alpha_l r^{-(l+1)} + \beta_l r^l) (A_l^m \cos(m\phi) + B_l^m \sin(m\phi)) P_l^m(\cos \theta).$$

où  $\alpha_l$ ,  $\beta_l$ ,  $A_l^m$  et  $B_l^m$  sont des inconnues déterminées par les conditions aux limites et aux interfaces et  $P_l^m$  des polynômes de Legendre. Le dipôle et son moment étant situés dans le plan  $xOz$ , le champ présente une symétrie par rapport à ce plan et on a  $B_l^m = 0$   $(l, m) \in \mathbb{N}^2$ . Pour simplifier les notations, on pose  $A_l^m \beta_l = C_{lm}$  et  $A_l^m \alpha_l = D_{lm}$ .

La solution homogène  $u$  est telle que  $u|_{\Omega_i}$  est une fonction harmonique pour chaque  $i$  et elle s'écrit donc

$$u(r, \theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^l \left( C_{lm}^{(i)} r^l + B_{lm}^{(i)} r^{-(l+1)} \right) \cos(m\phi) P_l^m(\cos \theta) \quad \text{pour } \mathbf{r} \in \Omega_i, 1 \leq i \leq N+1. \quad (1.9)$$

Les coefficients  $C_{lm}^{(i)}$  et  $D_{lm}^{(i)}$  pour  $(l, m) \in \mathbb{N}^2$  et  $1 \leq i \leq N+1$  étant des nombres qui seront déterminés lors de la formation de la solution générale  $V = u + v$ .

**Partie Singulière** On cherche à déterminer une solution à l'équation (1.5) sans tenir compte des conditions de continuité. La seule source de courant se situant à l'intérieur de la sphère la plus interne  $\Omega_1$ , on a

$$\begin{cases} \sigma_1 \Delta v = \partial_{\mathbf{q}} \delta_{\mathbf{p}} & \text{dans } \Omega_1, \\ \sigma_i \Delta v = 0 & \text{dans } \Omega_i, \forall i = 2 \dots N+1. \end{cases}$$

Une solution de cette équation est donnée par la fonction

$$v(\mathbf{r}) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\sigma_1} \frac{\mathbf{q} \cdot (\mathbf{p} - \mathbf{r})}{\|\mathbf{p} - \mathbf{r}\|^3} & \text{pour } \mathbf{r} \in \Omega_1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On note  $(r_{\mathbf{p}}, \theta_{\mathbf{p}}, 0)'$  les coordonnées sphériques de la position du dipôle de courant. L'amplitude de son moment (porté par l'axe  $Oz$ ) est  $q_0$ . On peut montrer que le développement de ce potentiel dans la base d'harmoniques sphériques utilisée dans (1.9) donne

$$v(r, \theta, \phi) = \begin{cases} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} q_{lm}^{\text{inf}} r^l \cos(m\pi) P_l^m(\cos \theta) & 0 \leq r < r_{\mathbf{p}}, \\ \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} q_{lm}^{\text{sup}} r^{-(l+1)} \cos(m\pi) P_l^m(\cos \theta) & r_{\mathbf{p}} < r \leq r_1, \\ 0 & r > r_1 \end{cases} \quad (1.10)$$

avec

$$q_{lm}^{\text{inf}} = \frac{q_0}{4\pi\sigma_1 r_{\mathbf{p}}^2} (2 - \delta_m^0) (m - l - 1) \frac{(l - m)!}{(l + m)!} r_{\mathbf{p}}^{-l} P_{l+1}^m(\cos \theta_0),$$

$$q_{lm}^{\text{sup}} = \frac{q_0}{4\pi\sigma_1 r_{\mathbf{p}}^2} (2 - \delta_m^0) \frac{(l - m)!}{(l + m - 1)!} r_{\mathbf{p}}^{l+1} P_{l-1}^m(\cos \theta_0).$$

**Solution Générale** On forme la solution générale en sommant les équations (1.10) et (1.9).

$$V(r, \theta, \phi) = \begin{cases} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^l \left( (C_{lm}^{(1)} + q_{lm}^{\text{inf}}) r^l + B_{lm}^{(1)} r^{-(l+1)} \right) \cos(m\phi) P_l^m(\cos \theta) & \text{pour } 0 \leq r < r_{\mathbf{p}} \\ \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^l \left( C_{lm}^{(1)} r^l + (B_{lm}^{(1)} + q_{lm}^{\text{sup}}) r^{-(l+1)} \right) \cos(m\phi) P_l^m(\cos \theta) & \text{pour } r_{\mathbf{p}} < r < r_1 \\ \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^l \left( C_{lm}^{(i)} r^l + B_{lm}^{(i)} r^{-(l+1)} \right) \cos(m\phi) P_l^m(\cos \theta) & \text{pour } r_{i-1} < r < r_i \\ 0 & \text{pour } r > r_N \end{cases} \quad \begin{matrix} i = 2, \dots, N \\ (1.11) \end{matrix}$$

La solution devant être finie en 0, la suite de coefficients  $B_{lm}^{(1)}$  pour  $(l, m) \in \mathbb{N}^2$  est nulle. Les  $2N - 1$  suites de coefficients  $C_{lm}^{(1)}, C_{lm}^{(2)}, \dots, C_{lm}^{(N)}, D_{lm}^{(2)}, \dots, D_{lm}^{(N)}$  sont fixées grâce aux conditions sur les interfaces et aux limites

$$\begin{cases} \lim_{r \rightarrow r_i^-} V(r, \theta, \phi) & = \lim_{r \rightarrow r_i^+} V(r, \theta, \phi) & , \quad 1 \leq i \leq N - 1, \\ \lim_{r \rightarrow r_i^-} \sigma_i \frac{\partial V}{\partial r}(r, \theta, \phi) & = \lim_{r \rightarrow r_i^+} \sigma_{i+1} \frac{\partial V}{\partial r}(r, \theta, \phi) & , \quad 1 \leq i \leq N - 1, \\ \lim_{r \rightarrow r_N^-} \sigma_N \frac{\partial V}{\partial r}(r, \theta, \phi) & = 0 & . \end{cases} \quad (1.12)$$

Les suites  $C_{lm}^{(i)}$  et  $D_{lm}^{(i)}$  pour  $i$  fixé représentent des coordonnées dans une base d'harmoniques sphériques et le système (1.12) se traduit par une suite de systèmes linéaires de



$2N - 1$  équations à  $2N - 1$  inconnues. Nous n'en détaillons pas le calcul mais les solutions de ces systèmes donnent

$$\begin{aligned} C_{lm}^{(1)} &= -r_1^{-(l+1)} q_{lm}^{\sup}, \\ C_{lm}^{(i)} &= 0 & 2 \leq i \leq N-1, \\ C_{lm}^{(N)} &= \sigma_1(l+1) r_1^{-(l+2)} q_{lm}^{\sup}, \\ D_{lm}^{(i)} &= 0 & 2 \leq i \leq N. \end{aligned}$$

Comme le montre (1.11), le potentiel électrique pour un modèle sphérique s'écrit sous forme d'une série convergente. Le calcul est effectivement analytique car chacun des termes de la série l'est, mais il faut atteindre la convergence pour avoir une solution à l'équation de Poisson (1.5). Il est possible suivant le niveau de convergence obtenu de s'approcher au plus près de la solution recherchée.

Le modèle sphérique a également été l'objet de travaux visant à en étendre les possibilités. On peut citer notamment deux évolutions notoires :

- un modèle sphérique à sphères non concentriques [80]
- un modèle à couches ellipsoïdales basé sur des fonctions harmoniques ellipsoïdales [30, 52].

Pour résumer, le modèle sphérique possède l'avantage de rendre possible un calcul rapide et fiable de solutions exactes. La géométrie qu'il utilise est bien trop simpliste pour pouvoir procéder à des localisations précises de sources. Pour les mêmes raisons, l'incorporation de conductivités anisotropes à ce modèle n'apporterait rien.

## 1.3 Modèles de têtes réalistes

L'avènement des techniques d'imageries telles que l'IRM anatomique a permis de créer des modèles 3D réalistes propre à la tête de chaque sujet. Ce fut une avancée conséquente en terme de précision, et plusieurs classes d'algorithmes permettent d'en tirer parti. Ces classes diffèrent entre elles par le type de modèle 3D utilisé (maillage triangulaire, maillage tétraédrique, image 3D labellisée...). Nous exposons maintenant les trois principales d'entre elles.

### 1.3.1 La méthode des différences finies (FDM)

Ce fut la première méthode employée pour essayer de mettre au point un modèle réaliste[120]. Elle repose sur une discrétisation de l'équation sur une grille parallélépipédique régulière. Dans des travaux plus récents, les noeuds de cette grille coïncident avec le centre des voxels d'une IRM anatomique. Il s'agit là d'un point de fort de la méthode auquel l'on doit probablement bon nombre des ses derniers développements [78, 73, 56]. Cela permet de s'affranchir de la génération souvent délicate de maillages ce qui est un avantage conséquent sur la BEM et la FEM.

Chaque noeud de la grille est assimilé au centre d'un petit volume de contrôle. Il existe plusieurs approches pour obtenir un schéma aux différences finies (pour une énumération assez complète, se reporter à [56]). Nous présentons ici l'approche la plus ancienne, celle utilisée par Witwer et al. Cette dernière repose sur la loi de Kirchoff et ne nécessite aucune justification mathématique, bien que l'étude de sa convergence soit possible.

Cette loi est une loi des courants. Dans le cadre de l'approximation quasi-statique, elle

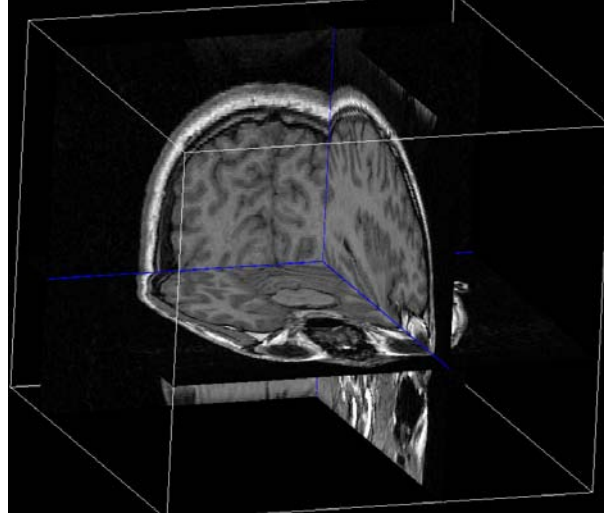


FIG. 1.2 – Un modèle de tête pour la FDM (source : *University of South Carolina*).

s'écrit pour une zone absente de toute source de courant

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0.$$

Cela revient à dire que la somme des intensités des courants entrants est égale à la somme des intensités des courants sortants. C'est une loi de conservation de la charge. On considère ici une partition d'un pavé droit englobant la tête en petits cubes de côtés  $h$ . Ces derniers sont centrés sur les noeuds de la grille  $\mathbf{p}_{i,j,k} \in \mathbb{R}^3$  pour  $(i, j, k) \in [1, N_x] \times [1, N_y] \times [1, N_z]$  et on a

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{p}_{i,j,k} - \mathbf{p}_{i-1,j,k} &= (h, 0, 0)' \\ \mathbf{p}_{i,j,k} - \mathbf{p}_{i,j-1,k} &= (0, h, 0)' \\ \mathbf{p}_{i,j,k} - \mathbf{p}_{i,j,k-1} &= (0, 0, h)' \end{aligned} \right\} \text{ pour } (i, j, k) \in [2, N_x] \times [2, N_y] \times [2, N_z].$$

On note  $v_{i,j,k}$  le potentiel au noeud correspondant  $v_{i,j,k} = V(\mathbf{p}_{i,j,k})$ . De même  $I_{i,j,k}^{i',j',k'}$  désigne l'intensité du courant du cube  $i, j, k$  au cube  $i + i', j + j', k + k'$  pour  $(i', j', k') \in \{-1, 0, 1\}^3$ .

Pour le cube  $i, j, k$ , la loi de Kirchhoff s'écrit

$$I_{i,j,k}^{1,0,0} + I_{i,j,k}^{-1,0,0} + I_{i,j,k}^{0,1,0} + I_{i,j,k}^{0,-1,0} + I_{i,j,k}^{0,0,1} + I_{i,j,k}^{0,0,-1} = 0. \quad (1.13)$$

On écrit ensuite le courant entre deux noeuds voisins comme le produit d'une conductivité représentative  $\underline{\sigma}_{i,j,k}^{i',j',k'}$  et de la différence de potentiel entre ces deux voisins. Pour la première coordonnée, par exemple, cela donne

$$I_{i,j,k}^{1,0,0} = \underline{\sigma}_{i,j,k}^{1,0,0} (v_{i+1,j,k} - v_{i,j,k}).$$

En réinjectant cette relation dans (1.13) et en utilisant l'approximation

$$\underline{\sigma}_{i,j,k}^{i',j',k'} = \frac{2}{\rho(i, j, k) + \rho(i' + j + j', k + k')} \quad \text{pour } (i', j', k') \in \{-1, 0, 1\}^3,$$

on obtient

$$\begin{aligned} & \frac{1}{h} \left( \frac{2}{\rho_{i,j,k} + \rho_{i-1,j,k}} v_{i-1,j,k} + \frac{2}{\rho_{i,j,k} + \rho_{i+1,j,k}} v_{i+1,j,k} + \frac{2}{\rho_{i,j,k} + \rho_{i,j-1,k}} v_{i,j-1,k} \right. \\ & \left. + \frac{2}{\rho_{i,j,k} + \rho_{i,j+1,k}} v_{i,j+1,k} + \frac{2}{\rho_{i,j,k} + \rho_{i,j,k-1}} v_{i,j,k-1} + \frac{2}{\rho_{i,j,k} + \rho_{i,j,k+1}} v_{i,j,k+1} - \rho_{i,j,k}^0 v_{i,j,k} \right) = 0 \end{aligned} \quad (1.14)$$

avec

$$\begin{aligned} \rho_{i,j,k}^0 = & \frac{2}{\rho_{i,j,k} + \rho_{i-1,j,k}} + \frac{2}{\rho_{i,j,k} + \rho_{i+1,j,k}} + \frac{2}{\rho_{i,j,k} + \rho_{i,j-1,k}} \\ & + \frac{2}{\rho_{i,j,k} + \rho_{i,j+1,k}} + \frac{2}{\rho_{i,j,k} + \rho_{i,j,k-1}} + \frac{2}{\rho_{i,j,k} + \rho_{i,j,k+1}} \end{aligned}$$

$\rho_{i,j,k}$  désigne la résistivité réelle au noeud  $i, j, k$ . C'est l'inverse de la conductivité réelle :  $\rho_{i,j,k} = \frac{1}{\sigma_{i,j,k}}$ .

L'injection d'un terme source est immédiate dans le membre de droite de (1.14).

L'équation (1.14) écrite pour chaque noeud de l'image fournit un système d'équations linéaire à  $N_x \times N_y \times N_z$  inconnues. Ce système possède les mêmes caractéristiques que celui issu de la méthode des éléments finis. La résolution de ces deux systèmes relève donc des mêmes considérations qui sont exposées en 1.3.2.

Contrairement à celle des éléments finis, l'étude de la convergence de méthodes de différences finies n'est pas systématique et peut poser des difficultés théoriques.

### 1.3.2 La méthode des éléments finis (FEM)

La méthode des éléments finis est une technique d'approximation et de discrétisation d'EDPs très utilisée. Le champ de l'électromagnétisme a vastement été couvert par cette technique et le problème direct fait référence à la catégorie, assez simple dans ce cadre, des problèmes d'électrostatique. Les premières applications de la FEM au calcul du potentiel électrique sur le scalp remontent à 1983 [104]. Il ne s'agissait là que d'un modèle 2D car les installations permettant d'obtenir des images anatomiques étaient encore rares et les ordinateurs d'une puissance limitée. Ce n'est qu'au début des années 90 que cette technique fut appliquée à de modèles anatomiques réalistes 3D [90, 122]. Nous réécrivons l'équation à résoudre pour calculer le potentiel électrique ainsi que les conditions aux limites.

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot (\sigma \nabla V) = \nabla \cdot \mathbf{J}^p \quad \text{dans } \Omega, \\ \frac{\partial V}{\partial \mathbf{n}} = 0 \quad \text{sur } S = \partial\Omega. \end{array} \right. \quad (1.15)$$

Dans le cas de la FEM, nous ne considérons aucun modèle de tête à proprement parler. La géométrie de la tête est uniquement précisée par la donnée de la conductivité qui pour la FEM varie dans l'espace  $\sigma(\mathbf{r})$ ,  $\Omega$  désignant ici l'intérieur de la tête de telle sorte que l'on a  $\sigma(\mathbf{r}) = 0$ ,  $\forall \mathbf{r} \notin \Omega$ .

Une première étape de la formulation par éléments finis consiste à reformuler le problème sous forme variationnelle. Ce nom est dû au fait que l'on détermine une énergie dont le

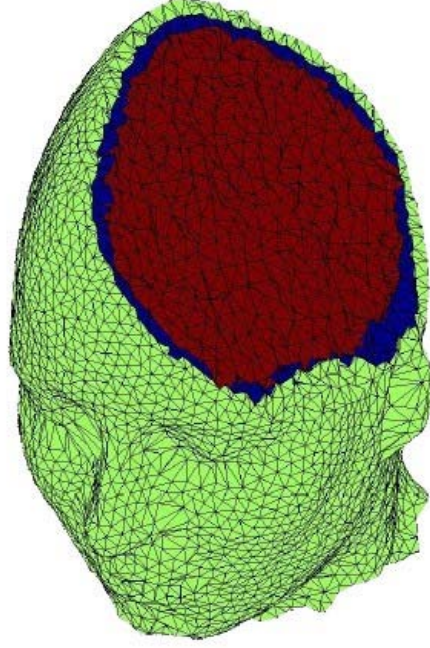


FIG. 1.3 – Un modèle de tête à base de tétraèdres pour la FEM (source : *University of South Carolina*).

minimum correspond à la solution de l'équation que l'on cherche à résoudre. Dans notre cas, cette énergie est

$$E(V) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma(\mathbf{r}) |\nabla V(\mathbf{r})|^2 d\mathbf{r} - \int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{J}^p(\mathbf{r}) V(\mathbf{r}) d\mathbf{r}. \quad (1.16)$$

Toute solution de (1.15) est donc solution de (1.16) et il est possible de montrer que la réciproque est vraie.

Ce problème de minimisation continue est alors discrétisé grâce à l'approche de Galerkin. L'inconnue est discrétisée sur un sous-espace de fonctions de dimension finie.

On désigne par  $\phi_1, \dots, \phi_n$  la base de fonctions utilisée où  $n$  est le cardinal de cette base souvent proportionnel au nombre de sommets ou de volumes de la tétraèdrisation de  $\Omega$ . Dans cette base, la décomposition de  $V$  s'écrit

$$V(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^n V_i \phi_i(\mathbf{r}).$$

En réinjectant cette identité dans l'équation (1.16), une approximation du problème est donnée par le système linéaire :

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = \mathbf{b} \quad (1.17)$$

avec

$$\begin{aligned} A_{ij} &= \int_{\Omega} \sigma(\mathbf{r}) \nabla \phi_i(\mathbf{r}) \cdot \nabla \phi_j(\mathbf{r}) d\mathbf{r}, \\ b_i &= \int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{J}^p \phi_i(\mathbf{r}) d\mathbf{r}, \\ v_i &= V_i. \end{aligned} \quad (1.18)$$

$\mathbf{A}$  est appelée matrice de rigidité. L'équation (1.18) permet d'établir deux propriétés importantes communes aux matrices de rigidité de toutes les méthodes FEM. Le support peu étendu des fonctions  $\phi_i$  assure un caractère creux à la matrice  $\mathbf{A}$  et le rôle symétrique de  $i$  et  $j$  dans cette équation en assure la symétrie. Ainsi, la très grande taille d'une tétraédrisation détaillée de la tête ne pénalise pas trop le temps de résolution du système (1.17). Bien entendu,  $\mathbf{J}^p$  et  $\sigma$  sont également décomposés sur des bases discrètes mais pour des raisons de clarté et de concision, nous renvoyons le lecteur à [124] pour davantage de détails.

D'un point de vue calculatoire, la méthode FEM possède un coût fixe qui réside dans l'assemblage de la matrice de rigidité. Avec la puissance grandissante des ordinateurs, le temps d'assemblage est raisonnable pour des géométries assez détaillées. Dans le cas de l'utilisation d'une méthode directe pour la résolution du système, on ajoute au coût fixe celui d'une méthode de décomposition de la matrice  $\mathbf{A}$  (de type LU ou QR par exemple). Chaque problème direct présente alors le coût d'un produit matrice-vecteur. Si une méthode directe est impossible pour des raisons de temps de calcul ou de mémoire, on se tourne alors vers des méthodes itératives (de type gradient conjugué ou MINRES par exemple) qui ne présentent aucun coût fixe et dont le coût par problème direct résolu est plus élevé.

Les méthodes d'éléments finis pour la résolution du problème direct en MEEG présentent l'avantage de pouvoir travailler avec une conductivité variable (éventuellement tensorielle) [121, 77]. On peut également mettre à leur crédit la possibilité de pouvoir s'adapter à tous types de géométries pour la tête. Ceci est contrebalancé par la grande difficulté que constitue la création de "bons" maillages tétraédriques, notamment à partir d'IRM anatomiques ou de leur segmentation.

### 1.3.3 La méthode des éléments frontières (BEM)

La méthode des éléments frontières repose sur une formulation du problème à résoudre sous forme d'équation intégrale. Elle a beaucoup été utilisée en électromagnétisme et en acoustique. Cette méthode s'applique à des problèmes physiques dans lesquels l'espace peut se partitionner en un ensemble d'ouverts de caractéristiques physiques constantes séparés par des interfaces. Elle consiste à mener des calculs sur les grandeurs physiques au niveau des interfaces et non dans les volumes.

Pour le problème direct de l'EEG, la BEM a été introduite pour la première fois en 1967 par Geselowitz [44]. Cette formulation a ensuite été reprise dans de nombreuses études et reste la seule formulation intégrale utilisée en MEEG à ce jour. Bien que cette formulation intégrale soit retrouvée d'une autre manière dans le chapitre suivant, nous exposons ici sa dérivation classique à titre de comparaison.

On considère un modèle de la tête (figure 2.1) composé d'ouverts  $\Omega_1, \dots, \Omega_{N+1}$  dans lesquels règnent des conductivités électriques constantes  $\sigma_1, \dots, \sigma_{N+1}$ . Ces milieux sont séparés par des surfaces. Pour simplifier l'exposé, nous nous plaçons dans le cas des volumes imbriqués c'est-à-dire vérifiant  $\bigcup_{i=1}^k \bar{\Omega}_i \subset \bigcup_{i=1}^{k+1} \bar{\Omega}_i$ ,  $\forall k$  tel que  $1 \leq k < N$  et où chaque volume  $\Omega_k$  ne possède de frontière commune  $S_{k-1}$  et  $S_k$  qu'avec les volumes respectifs  $\Omega_{k-1}$  et  $\Omega_{k+1}$ . Cette restriction n'est absolument pas nécessaire, et la méthode des éléments frontières peut s'écrire<sup>2</sup> pour n'importe quelle partition de l'espace  $\Omega = \bigcup_i \bar{\Omega}_i$ . On utilise jusqu'à la fin du présent rapport les notations  $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$  et  $R = |\mathbf{R}|$ .

<sup>2</sup>de manière certes un peu fastidieuse

Pour reformuler le problème direct sous forme d'une équation intégrale, on part de l'équation fondamentale de l'EEG (1.5) que l'on développe. On obtient

$$\nabla \sigma \cdot \nabla V + \sigma \Delta V = \nabla \cdot \mathbf{J}^p \quad (1.19)$$

d'où on applique ensuite le théorème de Green au champ de vecteur  $\frac{\sigma}{R} \nabla' V - \nabla' \left( \frac{\sigma}{R} \right) V$  sur chaque  $\Omega_k$  de frontière  $\partial\Omega_k$ .

$$\sum_{k=1}^N \int_{\Omega_k} \left( \begin{array}{cc} \frac{\sigma}{R} \Delta' V & - \Delta' \left( \frac{\sigma}{R} V \right) \\ A & + B \end{array} \right) dr' = \sum_{k=1}^N \int_{\partial\Omega_k} \left( \begin{array}{c} \frac{\sigma}{R} \nabla' V - \nabla' \left( \frac{\sigma}{R} \right) V \\ C \end{array} \right) \cdot \boldsymbol{\nu}_k ds' \quad (1.20)$$

Dans cette équation on a  $\Omega = \bigcup_{k=1}^{N+1} \Omega_k$ . On désigne par  $\mathbf{n}_k$  la normale extérieure à  $S_k$  et  $\boldsymbol{\nu}_k$  la normale à  $\partial\Omega_k = S_{k-1} \cup S_k$  qui vaut soit  $\mathbf{n}_k$  soit  $\mathbf{n}_{k-1}$  suivant que l'on se trouve sur  $S_{k-1}$  ou  $S_k$ . On va s'intéresser successivement au calcul des deux parties du membre de gauche et au calcul du membre de droite.

**Calcul de A** On décompose l'intégrale sur  $\Omega$  en la somme des intégrales sur  $\Omega_k$  et on écrit

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{\sigma}{R} \Delta' V dr' &= \sum_{k=1}^N \int_{\Omega_k} \frac{\sigma_k}{R} \Delta' V dr' \\ &= \sum_{k=1}^N \int_{\Omega_k} \frac{1}{R} \nabla' \cdot (\sigma_k \nabla' V) dr' \quad \text{car } \sigma_k \text{ est constant et } \Delta = \nabla \cdot \nabla \\ &= \sum_{k=1}^N \int_{\Omega_k} \frac{1}{R} \nabla' \cdot \mathbf{J}^p dr' \quad \text{car } \nabla \cdot (\sigma_k \nabla V) = \nabla \cdot \mathbf{J}^p \\ &= \sum_{k=1}^N \int_{\Omega_k} \nabla' \cdot \left( \frac{1}{R} \mathbf{J}^p \right) dr' - \sum_{k=1}^N \int_{\Omega_k} \nabla' \left( \frac{1}{R} \right) \cdot \mathbf{J}^p dr' \\ &= \sum_{k=1}^N \int_{\partial\Omega_k} \frac{1}{R} \mathbf{J}^p \cdot \boldsymbol{\nu}_k ds' - \sum_{k=1}^N \int_{\Omega_k} \nabla' \left( \frac{1}{R} \right) \cdot \mathbf{J}^p dr' \\ &= \int_{S_1} \frac{1}{R} \mathbf{J}^p \cdot \mathbf{n}_1 + \sum_{k=2}^N \left( \int_{S_k} \frac{1}{R} \mathbf{J}^p \cdot \mathbf{n}_k + \int_{S_{k-1}} \frac{1}{R} \mathbf{J}^p \cdot -\mathbf{n}_{k-1} \right) ds' \\ &\quad - \sum_{k=1}^N \int_{\Omega_k} \nabla' \left( \frac{1}{R} \right) \cdot \mathbf{J}^p dr' \\ &= \int_{S_N} \frac{1}{R} \mathbf{J}^p \cdot \mathbf{n}_N - \sum_{k=1}^N \int_{\Omega_k} \nabla' \left( \frac{1}{R} \right) \cdot \mathbf{J}^p dr' \end{aligned}$$

L'intégrale sur la surface  $S_N$  étant nulle car il n'y pas de source de courant sur le scalp, on obtient

$$\int_{\Omega} \frac{\sigma}{R} \Delta' V dr' = \int_{\Omega} \frac{\nabla' \cdot \mathbf{J}^p}{R} dr' = - \int_{\Omega} \nabla' \left( \frac{1}{R} \right) \cdot \mathbf{J}^p dr' = A$$

**Calcul de B** On se place dans le cas où  $\mathbf{r} \in \Omega_k$ .  $\sigma$  est alors constant et vaut  $\sigma_k$ .

$$\int_{\Omega_k} -\sigma_k V(\mathbf{r}') \Delta' \left( \frac{1}{R} \right) d\mathbf{r}' = 4\pi\sigma_k V(\mathbf{r})$$

car  $\Delta' \left( \frac{1}{R} \right) = -4\pi\delta_{\mathbf{r}}$ . Pour  $\mathbf{r} \in \Omega$ , cela s'écrit :

$$B = \int_{\Omega} -\sigma(\mathbf{r}') V(\mathbf{r}') \Delta' \left( \frac{1}{R} \right) d\mathbf{r}' = 4\pi\sigma(\mathbf{r}) V(\mathbf{r})$$

**Calcul de C** On décompose l'intégrale de surface sur les  $\partial\Omega_k$ .

$$C = \sum_k \int_{\partial\Omega_k} \left( \frac{1}{R} \sigma_k \nabla'_k V - \sigma_k \nabla' \left( \frac{1}{R} \right) V \right) \cdot \boldsymbol{\nu}_k ds'$$

La condition de continuité aux interfaces garantissant l'égalité des courants sortant d'un volume à une interface et rentrant dans le volume voisin donne :  $\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{\partial V}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{r}'_k - \lambda \mathbf{n}'_k) = \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{\partial V}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{r}'_k + \lambda \mathbf{n}'_k)$ .  $\sigma$  étant discontinue sur l'interface  $S_k$ ,  $\frac{\partial V}{\partial \mathbf{n}}$  l'est également. Pour lever l'ambiguïté correspondante dans le symbole  $\nabla'_k$ , on utilise le symbole  $\nabla'^{\pm}_k(\cdot) \cdot \mathbf{n}_k$  suivant que la composante du gradient le long de la normale  $\mathbf{n}_k$  calculée au point  $\mathbf{r}_k$  de  $S_k$  s'écrit

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{V(\mathbf{r}'_k) - V(\mathbf{r}'_k - \lambda \mathbf{n}_k)}{\lambda}$$

ou

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{V(\mathbf{r}'_k) - V(\mathbf{r}'_k + \lambda \mathbf{n}_k)}{\lambda}$$

Une telle précision n'est pas nécessaire pour le terme  $\nabla' \left( \frac{1}{R} \right)$  car cette quantité est continue à la traversée des  $S_k$ . En décomposant la somme précédente sur les  $S_k$ , on a :

$$\begin{aligned} C &= \int_{S_1} \left( \frac{1}{R} \sigma_1 \nabla'^{-}_1 V - \sigma_1 \nabla' \left( \frac{1}{R} \right) V \right) \cdot \mathbf{n}_1 ds' \\ &\quad + \sum_{k=2}^N \left( \int_{S_k} \left( \frac{1}{R} \sigma_k \nabla'^{-}_k V - \sigma_k \nabla' \left( \frac{1}{R} \right) V \right) \cdot \mathbf{n}_k ds' \right. \\ &\quad \left. + \int_{S_{k-1}} \left( \frac{1}{R} \sigma_k \nabla'^{+}_{k-1} V - \sigma_k \nabla' \left( \frac{1}{R} \right) V \right) \cdot -\mathbf{n}_{k-1} ds' \right) \\ &= \int_{S_N} \frac{1}{R} \sigma_N \nabla'^{-}_N V ds' \\ &\quad + \sum_{k=1}^{N-1} \int_{S_k} \frac{1}{R} \left( \sigma_{k+1} \nabla'^{+}_k V - \sigma_k \nabla'^{-}_k V \right) \cdot \mathbf{n}_k ds' \\ &\quad - \sum_{k=1}^{N-1} (\sigma_k - \sigma_{k+1}) \int_{S_k} \sigma_k \nabla' \left( \frac{1}{R} \right) V \cdot \mathbf{n}_k ds' \end{aligned}$$

Le premier terme est nul car  $\Omega_{N+1}$  représente l'air autour de la tête qui est de conductivité nulle. Aucun courant ne sort donc de la tête. Le second terme est lui aussi nul à cause de la condition de continuité sur les interfaces évoquées plus haut. Il ne reste donc plus que le dernier terme.

$$C = - \sum_{k=1}^{N-1} (\sigma_k - \sigma_{k+1}) \int_{S_k} \sigma_k \nabla' \left( \frac{1}{R} \right) V \cdot \mathbf{n}_k ds'$$

En regroupant les valeurs calculées pour les quantités  $A$ ,  $B$  et  $C$ , on obtient :

$$B = C - A$$

$$4\pi\sigma(\mathbf{r}) V(\mathbf{r}) = - \sum_{k=1}^{N-1} (\sigma_k - \sigma_{k+1}) \int_{S_k} \sigma_k \nabla' \left( \frac{1}{R} \right) V \cdot \mathbf{n}_k ds' + \int_{\Omega} \nabla' \left( \frac{1}{R} \right) \cdot \mathbf{J}^p dr'$$

L'équation obtenue peut se mettre sous la forme

$$\sigma(\mathbf{r}) V(\mathbf{r}) = \sigma_0 V_0(\mathbf{r}) - \frac{1}{4\pi} \sum_{k=1}^{N-1} (\sigma_k - \sigma_{k+1}) \int_{S_k} \sigma_k \nabla' \left( \frac{1}{R} \right) V \cdot \mathbf{n}_k ds' \quad (1.21)$$

où  $V_0 = \frac{1}{4\pi\sigma_0} \int_{\Omega} \nabla' \left( \frac{1}{R} \right) \cdot \mathbf{J}^p(\mathbf{r}') d\mathbf{r}'$  est le potentiel électrique dû aux courants primaires  $\mathbf{J}^p$  dans un milieu de conductivité  $\sigma_0 = 1$ .

Telle quelle, cette équation n'est pas valable pour  $\mathbf{r}$  appartenant à l'une des interfaces. C'est pourtant précisément ce que l'on souhaite<sup>3</sup>.

En fait, si l'on considère la fonction

$$g(\mathbf{q}) = \int_{S_i} V(\mathbf{r}') \nabla' \left( \frac{1}{R} \right) \cdot \mathbf{n}_i(\mathbf{r}') ds'_i = \int_{S_i} V(\mathbf{r}') \frac{\mathbf{q} - \mathbf{r}'}{\|\mathbf{q} - \mathbf{r}'\|^3} \cdot \mathbf{n}_i(\mathbf{r}') ds'_i \quad \mathbf{q} \notin S_i,$$

on peut montrer que si  $r \in S_i$  alors  $\lim_{\mathbf{q} \rightarrow \mathbf{r}} g(\mathbf{q}) = -2\pi V(\mathbf{r}) + \int_{S_i} V(\mathbf{r}') \frac{R}{\|R\|^3} \cdot \mathbf{n}_k(\mathbf{r}') ds'$ . En appliquant ce résultat à l'équation (1.21), il vient :

$$\sigma_0 V_0(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}(\sigma_i + \sigma_{i+1})V(\mathbf{r}) + \frac{1}{4\pi} \sum_k (\sigma_k - \sigma_{k+1}) \int_{S_k} V(\mathbf{r}') \nabla' \left( \frac{1}{R} \right) \cdot \mathbf{n}_k ds' \quad \mathbf{r} \in S_i \quad (1.22)$$

Ces égalités pour  $1 \leq k \leq N$  forment l'équation intégrale de la seule formulation utilisée en EEG jusqu'à la découverte de la formulation symétrique. L'inconnue est la valeur du potentiel sur les interfaces. Pour discrétiser cette équation, on décompose l'inconnue sur  $N$  bases de fonctions (une par surface). Nous ne décrivons pas ici ce procédé qui est détaillé en 2.5.2.

Une fois discrétisée, cette approche donne naissance à un système linéaire du type  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ . Le vecteur  $\mathbf{x}$  contient les coordonnées du potentiel dans les bases de fonctions évoquées plus haut. La matrice  $\mathbf{A}$  est carrée et pleine. Sa taille (celle du vecteur  $\mathbf{x}$ ) correspond à la somme du nombre de sommets sur les maillages de chacune des interfaces. Comme pour la FEM, ce système peut-être résolu de manière directe ou itérative avec les mêmes considérations en terme de temps de calcul. Une étude du conditionnement de la matrice  $\mathbf{A}$  est menée dans [99].

Implémentée telle quelle, cette formulation du problème direct par éléments frontières permet d'utiliser de manière assez simple un modèle réaliste de tête spécifique à chaque sujet. Ceci est particulièrement remarquable pour la BEM<sup>4</sup> dans la mesure où bon nombre de logiciels<sup>5</sup> proposent maintenant des fonctionnalités permettant d'extraire de manière semi-automatique des segmentations d'images anatomiques ainsi que leurs triangulations. Ces avantages pratiques sont contrebalancés par deux défauts numériques majeurs de cette technique.

---

<sup>3</sup>c'est le principe même de la BEM!!

<sup>4</sup>en comparaison de la FEM

<sup>5</sup>libres ou commerciaux



- Une imprécision notoire apparaît dans le calcul du potentiel lorsque la source se rapproche d'une interface. Par exemple, pour obtenir des résultats acceptables, une source dipolaire ne doit pas être placée à une distance inférieure à la taille typique des triangles du maillage [99, 38, 25]. Cela est d'autant plus gênant que les sources mesurables en EEG sont censées être situées à quelques millimètres seulement de deux interfaces (cf 4.1). Pour bien faire il faudrait donc mailler ces interfaces avec un grand nombre de sommets, ce nombre rendant difficile voire impossible certains calculs.
- La différence de conductivité entre les différents milieux pose également problème. La conductivité de l'os du crâne est bien plus faible que celle de la peau (typiquement  $\sigma_{scalp}/\sigma_{crane} \approx 40$ ) et la BEM est d'autant moins précise que cette différence de conductivité est importante.

Une solution a été proposée au second problème, il s'agit de l'approche du problème isolé (*Isolated Problem Approach IPA*) [55, 81].

Cette approche essaie de réduire les gradients de potentiel entre les différentes couches. Dans [55], les auteurs se placent dans un modèle à couches concentriques où toutes les sources sont à l'intérieur du volume  $\Omega_1$ , le volume de conductivité faible censé représenter l'os étant  $\Omega_2$ . Un premier problème direct est résolu avec une géométrie simplifiée :  $\Omega_1$  délimité par  $S_1$  est plongé dans le vide de conductivité nulle. Un changement de variable est alors opéré dans le problème direct original : on soustrait au potentiel sur  $S_1$  la solution du premier calcul. Dans le cadre pour lequel elle a été introduite, cette technique améliore notablement la précision dans certains cas alors qu'elle la dégrade dans d'autres [86].

Nous proposons dans le prochain chapitre une nouvelle solution à ces problèmes de précision numérique.



## Chapitre 2

# Une formulation symétrique pour la BEM

La méthode que nous décrivons ici est inspirée des travaux de J.C. Nédélec[88]. Nous présentons notre nouvelle formulation pour la méthode BEM , proposant ainsi une alternative à la celle de Geselowitz [44], seule méthode utilisée jusqu'à présent pour le problème direct de l'EEG. Ces travaux ont été publiés à la conférence IPMI 2003 [1].

### 2.1 Généralités, notations

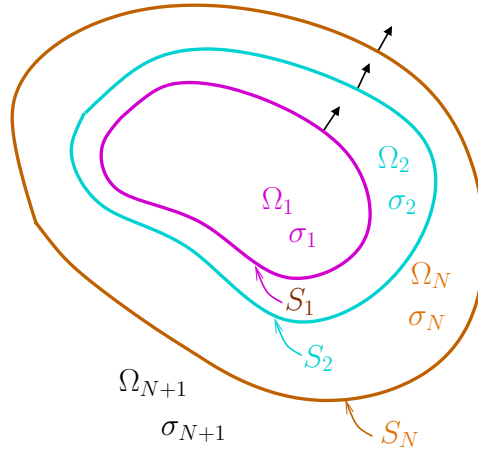


FIG. 2.1 – Modèle de tête à couches imbriquées

Dans ce chapitre, on considère un modèle de tête constitué d'ensembles ouverts  $\Omega_1, \dots, \Omega_{N+1}$  de conductivités constantes  $\sigma_1, \dots, \sigma_{N+1}$  séparés par des surfaces  $S_1, \dots, S_N$ . Pour chaque surface, on note  $\mathbf{n}$  la normale extérieure à la surface sous-entendue dans le contexte. Bien que tout ce qui suit puisse être étendu de manière immédiate à des topologies plus générales nous nous restreignons à des topologies imbriquées, c'est-à-dire vérifiant :

$$\begin{aligned} \bigcup_{i=1}^k \overline{\Omega_i} &\subset \bigcup_{i=1}^{k+1} \overline{\Omega_i} \quad , \forall k \text{ tel que } 1 \leq k < N, \\ S_i &= \partial\Omega_i \cap \partial\Omega_{i+1}, \\ \overline{\Omega_i} &= \Omega_i \cup S_i \cup S_{i-1}. \end{aligned}$$

On note  $f_{S_j}$  la restriction d'une fonction  $f$  à l'interface  $S_j$ . On définit le saut d'une fonction  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  sur l'interface  $S_j$  de la manière suivante :

$$[f]_j = f_{S_j}^- - f_{S_j}^+,$$

où  $f^-$  et  $f^+$  sont des fonctions définies sur  $S_j$  représentant respectivement les limites intérieure et extérieure de  $f$  en  $S_j$  :

$$\text{pour } \mathbf{r} \in S_j, \quad f_{S_j}^\pm(\mathbf{r}) = \lim_{\alpha \rightarrow 0^\pm} f(\mathbf{r} + \alpha \mathbf{n}).$$

La définition de ces quantités dépend de l'orientation des normales si bien qu'une inversion des normales mène à un échange des quantités  $f^-$  et  $f^+$ .

## 2.2 Réécriture de l'équation de Poisson

Le fait que les conductivités soient supposées constantes dans chaque domaine  $\Omega_i$  permet de sortir les  $\sigma_i$  des dérivations spatiales. Cela mène au problème de Laplace connecté.

$$\sigma_i \Delta V = f \quad \text{dans } \Omega_i, \forall i = 1 \dots N+1 \quad (2.1)$$

$$[V]_j = [\sigma \partial_{\mathbf{n}} V]_j = 0 \quad \text{sur } S_j, \forall j = 1 \dots N \quad (2.2)$$

L'équation 2.2 exprime deux conditions aux bords. D'une part la continuité du potentiel à travers les interfaces  $S_j$  et d'autre part la continuité de la dérivée normale du potentiel à travers ces mêmes surfaces. Cette seconde condition provient conjointement de la continuité du courant électrique et de l'approximation quasi-statique suivant laquelle on a  $\sigma \partial_{\mathbf{n}} V = \mathbf{n} \cdot \sigma E$ .

## 2.3 Théorème de représentation

Dans cette section, nous exposons les outils qui permettent de réduire le problème physique représenté par l'ensemble d'équations (1.1) à des équations portant sur des quantités définies sur les interfaces  $S_j$ . La clé de voûte de cette réduction est un théorème fondamental de représentation [17, 88] (théorème 1) que nous rappelons.

### 2.3.1 Prérequis et notations

Tout d'abord, nous définissons une fonction de Green

$$G(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi \|\mathbf{r}\|} = \frac{1}{4\pi r} \quad \text{vérifiant} \quad -\Delta G = \delta_0. \quad (2.3)$$

Étant donné  $\partial\Omega$  une surface régulière, nous introduisons également quatre opérateurs associant à une fonction scalaire de  $\partial\Omega$  une autre fonction scalaire de  $\partial\Omega$ .

$$\begin{aligned} (\mathcal{D}f)(\mathbf{r}) &= \int_{\partial\Omega} \partial_{\mathbf{n}'} G(\mathbf{R}) f(\mathbf{r}') \, ds(\mathbf{r}'), & (\mathcal{S}f)(\mathbf{r}) &= \int_{\partial\Omega} G(\mathbf{R}) f(\mathbf{r}') \, ds(\mathbf{r}'), \\ (\mathcal{N}f)(\mathbf{r}) &= \int_{\partial\Omega} \partial_{\mathbf{n}, \mathbf{n}'} G(\mathbf{R}) f(\mathbf{r}') \, ds(\mathbf{r}'), & (\mathcal{D}^* f)(\mathbf{r}) &= \int_{\partial\Omega} \partial_{\mathbf{n}} G(\mathbf{R}) f(\mathbf{r}') \, ds(\mathbf{r}'). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Dans ce qui précède,  $\mathbf{n}$  représente la normale extérieure à  $\partial\Omega$  en  $\mathbf{r}$  et  $\mathbf{n}'$  la normale extérieure à  $\partial\Omega$  en  $\mathbf{r}'$ . On remarquera que les opérateurs  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}^*$  sont adjoints pour le produit scalaire  $L^2(\partial\Omega)$   $\langle f, g \rangle = \int_{\partial\Omega} f(\mathbf{r}) g(\mathbf{r}) ds(\mathbf{r}')$ .

Par abus de notation, nous écrirons parfois les quantités  $(\mathcal{D}f)(\mathbf{r})$  et  $(\mathcal{S}f)(\mathbf{r})$  pour  $\mathbf{r} \notin \partial\Omega$ . Le même abus peut être concédé pour les quantités  $(\mathcal{N}f)(\mathbf{r})$  et  $(\mathcal{D}^*f)(\mathbf{r})$  à condition de considérer un champ de vecteur régulier  $\mathbf{n}(\mathbf{r})$  pour remplacer la normale à la surface  $\partial\Omega$ .

Afin de lever toute ambiguïté et de respecter la physique nous considérons les fonctions potentielles nulles à l'infini. Nous dirons qu'une telle fonction satisfait à l'hypothèse  $\mathcal{H}$  si :

$$\begin{cases} \lim_{\|\mathbf{r}\| \rightarrow \infty} \|\mathbf{r}\| |u(\mathbf{r})| < \infty \\ \lim_{\|\mathbf{r}\| \rightarrow \infty} \|\mathbf{r}\| \frac{\partial u}{\partial r}(\mathbf{r}) = 0 \end{cases},$$

Cette hypothèse correspond à l'idée physique que le champ statique généré par une source à l'infini est nul. Cela correspond bien aux conditions aux limites de l'équation de Poisson que nous résolvons, étant donné que toutes les charges sont contenues dans la tête qui est un ensemble borné. Ainsi, si l'on se trouve à l'infini d'une source, on est également à l'infini de toutes les sources. On notera que la fonction de Green définie par l'équation (2.3) vérifie l'hypothèse  $\mathcal{H}$ .

### 2.3.2 Théorème de représentation

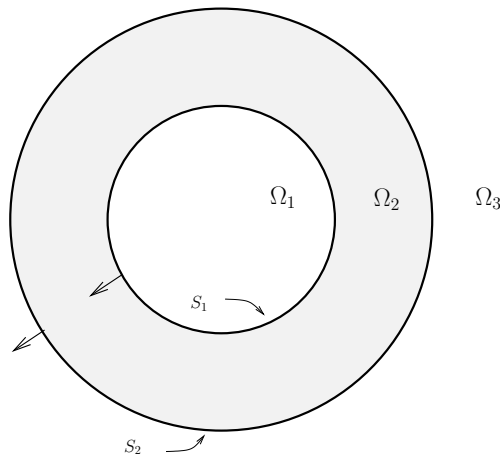


FIG. 2.2 – Une coupe du volume  $\Omega_2$  dans une topologie imbriquée. Les flèches montrent les orientations des normales.

Voici le théorème fondamental sur lequel repose la méthode des éléments frontières.

**Théorème 1 (Théorème de Représentation)** Soient  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$  un ensemble ouvert dont la frontière  $\partial\Omega$  est régulière et  $u : (\mathbb{R}^3 \setminus \partial\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction harmonique ( $\Delta u = 0$ ) dans  $\mathbb{R}^3 \setminus \partial\Omega$ , vérifiant l'hypothèse  $\mathcal{H}$ . On définit  $p(\mathbf{r}) \stackrel{\text{def}}{=} \partial_{\mathbf{n}} u(\mathbf{r})$ . On a alors les égalités

suivantes.

$$\begin{aligned}
 -p &= +\mathcal{N}[u] & -\mathcal{D}^*[p] & \text{pour } \mathbf{r} \notin \partial\Omega \\
 u &= -\mathcal{D}[u] & +\mathcal{S}[p] & \\
 -p^\pm &= +\mathcal{N}[u] + (\pm \frac{\mathcal{I}}{2} - \mathcal{D}^*)[p] & \text{pour } \mathbf{r} \in \partial\Omega \\
 u^\pm &= (\mp \frac{\mathcal{I}}{2} - \mathcal{D})[u] & +\mathcal{S}[p] & 
 \end{aligned} \tag{2.5}$$

Dans ce qui précède,  $\mathcal{I}$  désigne l'opérateur identité. Les équations (2.5) sont également valables pour des ensembles ouverts disjoints  $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$  vérifiant  $\overline{\Omega}_1 \cup \overline{\Omega}_2 \cup \overline{\Omega}_3 = \mathbb{R}^3$ , et séparés par des frontières régulières  $\partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2 = S_1$ ,  $\partial\Omega_2 \cap \partial\Omega_3 = S_2$ , et  $\partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_3 = \emptyset$ , en considérant  $\partial\Omega = S_1 \cup S_2$ .

Ce théorème est d'une importance capitale car il montre qu'une fonction harmonique dans  $\mathbb{R}^3 \setminus \partial\Omega$  vérifiant l'hypothèse  $\mathcal{H}$  est entièrement déterminée par la donnée de son saut à travers la surface  $\partial\Omega$  et de celui de sa dérivée normale. Qui plus est, ce résultat est également valable si  $\partial\Omega$  est composée de deux composantes connexes comme dans la géométrie que nous considérons.

### 2.3.3 Potentiels simple couche et double couche

Le théorème précédent nous a montré grâce à l'Eq.2.5 qu'une fonction harmonique  $u$  pouvait se représenter par l'intermédiaire de deux fonctions définies sur  $\partial\Omega$  :  $\mu = -[u]$  et  $\xi = [p]$ . Historiquement, le terme  $\mathcal{S}\xi$  porte le nom de *potentiel de simple couche*. Cette fonction est continue à la traversée de  $\partial\Omega$  alors que sa dérivée normale y est discontinue. Le terme  $\mathcal{D}\mu$ , quant à lui, porte le nom de *potentiel de double couche*. De manière duale, cette fonction est discontinue sur  $\partial\Omega$  alors que sa dérivée normale est continue. Pour résumer, nous avons

$$\begin{aligned}
 [\mathcal{S}\xi]_{\partial\Omega} &= 0 & , & & [\partial_n \mathcal{S}\xi]_{\partial\Omega} &\neq 0 \\
 [\mathcal{D}\mu]_{\partial\Omega} &\neq 0 & , & & [\partial_n \mathcal{D}\mu]_{\partial\Omega} &= 0.
 \end{aligned}$$

Pour appliquer ce formalisme des simple/double couche à notre modèle de tête à couches imbriquées (2.2), il suffit de sommer les contributions de toutes les interfaces soit  $u_s = \sum_i \mathcal{S}\xi_{S_i}$  et  $u_d = \sum_i \mathcal{D}\mu_{S_i}$ . Cela mène à des potentiels de simple et double couche jouissant des mêmes propriétés de saut sur la surface  $\partial\Omega$  que dans le cas d'une interface unique. On peut également généraliser, de manière immédiate, les égalités de l'équation 2.5 par additivité. On a

$$\partial_n u_s^\pm(\mathbf{r}) = \mp \frac{\xi_{S_j}}{2} + \sum_{i=1}^N \mathcal{D}_{ji}^* \xi_{S_i} \quad \forall \mathbf{r} \in S_j, \tag{2.6}$$

$$u_d^\pm(\mathbf{r}) = \pm \frac{\mu_{S_j}}{2} + \sum_{i=1}^N \mathcal{D}_{ji} \mu_{S_i} \quad \forall \mathbf{r} \in S_j. \tag{2.7}$$

Les opérateurs  $\mathcal{D}_{ji}^*$  and  $\mathcal{D}_{ji}$  sont des restrictions des opérateurs  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}^*$  qui à une fonction définie sur  $S_i$  associent une fonction définie sur  $S_j$ . Cette manière de restreindre un opérateur à l'aide d'indices sera utilisée sur tous les opérateurs par la suite.

## 2.4 Formulations intégrales

Dans cette section, nous allons utiliser le Théorème de représentation (1) pour obtenir des formulations intégrales à l'équation de Laplace du problème direct en EEG (2.2). Pour

ce faire, on décompose le potentiel électrique recherché  $V$  en la somme de deux composantes : une solution  $v$  dite homogène prenant en compte les sources mais ne respectant pas nécessairement les conditions de saut 2.2 et une fonction harmonique  $u$  permettant à  $V$  de satisfaire ces conditions.

$$V = u + v \quad \text{avec} \quad \Delta v = f \quad \text{et} \quad \Delta u = 0$$

Nous établirons trois manières de déterminer une telle combinaison qui mènent chacune à une formulation intégrale différente.

### 2.4.1 Solution homogène

Tout d'abord, on décompose le terme source  $f$  sur chaque domaine  $f = \sum_{i=1}^N f_{\Omega_i}$ . On rappelle qu'il n'y a de source ni sur les interfaces  $S_i$  ni dans  $\Omega_{N+1}$ , le domaine extérieur.

**Domaine Unique :** Pour chaque domaine  $\Omega_i$ , on calcule une solution à l'équation  $\Delta v_{\Omega_i} = f_{\Omega_i}$ . Cette fonction correspond au potentiel électrique que créerait le terme source  $f_{\Omega_i}$  dans un milieu homogène de conductivité électrique égale à 1. Une simple application du Théorème de convolution permet d'établir que  $v_{\Omega_i}(\mathbf{r}) = -f_{\Omega_i} * G(\mathbf{r})$ . En effet,  $\Delta v_{\Omega_i} = -f_{\Omega_i} * \Delta G(\mathbf{r}) = f_{\Omega_i}(\mathbf{r})$

**Domaines Multiples :** Il existe différentes manières de combiner les fonctions  $v_{\Omega_i}$  pour obtenir une solution homogène globale  $v$ . Nous en décrivons ici deux qui seront à l'origine de deux des trois formulations intégrales qui suivront.

Tout d'abord, il est possible de considérer la fonction  $v_s$  définie comme suit :

$$v_s = \sum_{i=1}^N v_{\Omega_i} / \sigma_i. \quad (2.8)$$

Il est facile de vérifier que cette fonction résout l'équation de Laplace (2.1).

$$\sigma \Delta v_s = \sigma \sum_{i=1}^N \Delta v_{\Omega_i} / \sigma_i = \sigma \sum_{i=1}^N \frac{f_{\Omega_i}}{\sigma_i} = \sum_{i=1}^N f_{\Omega_i} = f \quad \text{dans chaque } \Omega_i.$$

La fonction  $v_s$  et sa dérivée normale  $\partial_{\mathbf{n}} v_s$  sont continues à travers chacune des interfaces (car sommes de fonctions continues à travers ces interfaces). En revanche, la quantité  $\sigma \partial_{\mathbf{n}} v_s$  y est discontinue.

$$[v_s]_j = 0, \quad [\partial_{\mathbf{n}} v_s]_j = 0, \quad [\sigma \partial_{\mathbf{n}} v_s]_j \neq 0.$$

Cette fonction sera utilisée dans l'approche simple couche.

D'une manière duale, on pourrait vouloir considérer la fonction  $\tilde{v}_d(\mathbf{r}) = \sigma^{-1}(\mathbf{r}) \sum_{i=1}^N v_{\Omega_i}$  qui est solution de l'équation de Laplace (2.1) et dont la quantité  $\sigma \partial_{\mathbf{n}} \tilde{v}_s$  est continue à travers les interfaces. Hélas, cette fonction n'est pas définie dans  $\Omega_{N+1}$  car  $\sigma$  y est nul.

A la place, on considère la fonction  $v_d$  définie par

$$v_d = \sum_{i=1}^N v_{\Omega_i} \quad (2.9)$$

qui vérifie l'équation de Laplace  $\Delta v_d = f$  et qui jouit des mêmes propriétés de saut que  $v_s$ , à savoir :

$$[v_d]_j = 0, \quad [\partial_{\mathbf{n}} v_d]_j = 0, \quad [\sigma \partial_{\mathbf{n}} v_d]_j \neq 0.$$

Cette fonction sera utilisée dans l'approche double couche.

### 2.4.2 Approche simple couche

Cette première approche est, peut-être, la plus naturelle. Elle consiste à prendre une solution homogène  $v$  continue sur les interfaces et à ajuster la partie harmonique pour satisfaire la condition de saut de la dérivée normale. On note  $u_s = V - v_s$  cette partie harmonique (avec  $v_s$  définie par (2.8)). En effet,  $u_s$  est harmonique dans  $\Omega = \Omega_1 \cup \dots \cup \Omega_N$ , car  $\sigma_i \Delta u_s = \sigma_i \Delta V - \sigma_i \Delta v_s = f_{\Omega_i} - f_{\Omega_i} = 0$  dans chaque  $\Omega_i$ . Elle est également harmonique dans le domaine externe  $\Omega_{N+1}$  car  $V$  et  $v_s$  le sont. On a, de plus,  $[V]_j = 0$  et  $[v_s]_j = 0$  (par construction de  $v_s$ ) donc  $[u_s]_j = 0$ . Finalement, à l'aide de la section 2.3.3, on peut conclure que  $u_s$  est un potentiel simple couche pour le domaine  $\Omega = \Omega_1 \cup \dots \cup \Omega_N$  avec la frontière  $\partial\Omega = S_1 \cup \dots \cup S_N$ .

On applique alors l'équation (2.6) exprimant la dérivée normale d'un potentiel simple couche sur chaque interface :

$$[\sigma \partial_{\mathbf{n}} u_s]_j = \sigma_j \partial_{\mathbf{n}} u_s^- - \sigma_{j+1} \partial_{\mathbf{n}} u_s^+ = \frac{\sigma_j + \sigma_{j+1}}{2} \xi_{S_j} + (\sigma_j - \sigma_{j+1}) \sum_{i=1}^{N-1} \mathcal{D}_{ji}^* \xi_{S_i}.$$

On écrit également  $[\sigma \partial_{\mathbf{n}} u_s]_j$  en fonction des quantités connues :

$$[\sigma \partial_{\mathbf{n}} u_s]_j = -[\sigma \partial_{\mathbf{n}} v_s]_j = -(\sigma_j - \sigma_{j+1}) \partial_{\mathbf{n}} v_s \quad \text{on } S_j. \quad (2.10)$$

Les deux équations précédentes se combinent en

$$\partial_{\mathbf{n}} v_s = \frac{\sigma_j + \sigma_{j+1}}{2(\sigma_{j+1} - \sigma_j)} \xi_{S_j} - \sum_{i=1}^{N-1} \mathcal{D}_{ji}^* \xi_{S_i} \quad \text{sur chaque } S_j. \quad (2.11)$$

Il s'agit d'un système de  $N$  équations intégrales à  $N$  fonctions inconnues  $\xi_{S_1}, \dots, \xi_{S_N}$ . Il possède une unique solution définie à une constante près (pour plus de détail se reporter à [88]). Pour obtenir la fonction  $u_s$  (et donc le potentiel recherché  $V$ ) à partir cette solution, il suffit d'appliquer la formule de définition du potentiel simple couche

$$u_s(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^N \mathcal{S}_{ji} \xi_{S_i}.$$

### 2.4.3 Approche double couche

Cette approche est duale à l'approche simple couche. Elle s'établit d'une manière légèrement moins directe afin d'éviter de diviser par  $\sigma_{N+1} = 0$  comme nous l'avons fait pour définir  $v_d$ .

On part d'une fonction satisfaisant  $[\sigma \partial_{\mathbf{n}} V]_j = 0$  à laquelle on ajoute une fonction harmonique pour satisfaire  $[V]_j = 0$ . Pour ce faire, on considère la fonction  $u_d = \sigma V - v_d$ . Par construction,  $u_d$  est harmonique dans  $\Omega = \Omega_1 \cup \dots \cup \Omega_N$  car pour chaque  $\Omega_i$ , on a  $\Delta u_d = \sigma_i \Delta V - \Delta v_d = f_{\Omega_i} - f_{\Omega_i} = 0$ . Cette fonction est également harmonique dans  $\Omega_{N+1}$  par harmonicité de  $V$  et  $v_d$  dans ce même domaine. Du fait que  $[\sigma \partial_{\mathbf{n}} V]_j = 0$  et



$[\partial_{\mathbf{n}} v_d]_j = 0$ , on peut conclure que  $[\partial_{\mathbf{n}} u_d]_j = 0$  sur chaque interface  $S_j$ . Cela montre que  $u_d$  est un potentiel double couche pour  $\Omega = \Omega_1 \cup \dots \cup \Omega_N$  avec la frontière  $\partial\Omega = S_1 \cup \dots \cup S_N$ .

On part ensuite de la condition de saut  $[V] = 0$  qui mène à  $\sigma_{j+1}(u_d + v_d)^- = \sigma_j(u_d + v_d)^+$  pour chaque  $S_j$ . (On pourra remarquer qu'il s'agit d'une formule équivalente à  $\sigma_j^{-1}(u_d + v_d)^- = \sigma_{j+1}^{-1}(u_d + v_d)^+$  pour  $\sigma \neq 0$  ainsi que d'une extension naturelle dans le cas  $\sigma = 0$ .) On y réinjecte la formule de représentation d'un potentiel double couche (2.7). Enfin on remplace  $\mu_{S_i}$  par  $(\sigma_{i+1} - \sigma_i)V_{S_i}$  car  $\mu_{S_i} = -[V] = (\sigma_{i+1} - \sigma_i)V_{S_i}$ . On obtient alors

$$v_d = \frac{\sigma_j + \sigma_{j+1}}{2} V_{S_j} - \sum_{i=1}^N (\sigma_{i+1} - \sigma_i) \mathcal{D}_{ji} V_{S_i} \quad \text{sur chaque } S_j. \quad (2.12)$$

On rappelle que  $v_d$  (2.9) est calculable comme la solution de  $\Delta v_d = f$ , qui correspond à un problème équivalent dans un milieu homogène de conductivité unité. L'équation obtenue (2.12) est, là encore, un système linéaire d'équations intégrales. De plus, en remplaçant l'opérateur  $\mathcal{D}$  par sa définition, on retrouve

$$v_d = \frac{\sigma_j + \sigma_{j+1}}{2} V_{S_j} - \sum_{i=1}^N (\sigma_{i+1} - \sigma_i) \int_{S_i} \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}'} G(R) V(\mathbf{r}') ds(\mathbf{r}') \quad \text{sur chaque } S_j. \quad (2.13)$$

qui n'est autre que la formulation BEM (1.22) classiquement utilisée en MEG et en EEG [44, 102, 32, 54, 86]. Cette approche présente l'avantage de fournir une équation directement sur  $V$ . Aucune étape supplémentaire n'est donc nécessaire pour son obtention. Comme pour l'approche simple couche, la solution de (2.12) est unique à une constante près.

#### 2.4.4 Approche symétrique

Cette troisième approche utilise à la fois les potentiels simple et double couche. De cette manière, le traitement de  $v$  et  $p$  devient complètement symétrique (d'où la dénomination de l'approche). Cette méthode est basée sur la théorie de Nédélec [88] et est aussi étroitement liée aux algorithmes décrits dans [49, 70]. Mais à notre connaissance, elle n'a jamais été utilisée pour le problème direct en MEEG.

Pour bâtir cette approche nous avons besoin des fonctions

$$u_{\Omega_i} = \begin{cases} V - v_{\Omega_i}/\sigma_i & \text{dans } \Omega_i \\ -v_{\Omega_i}/\sigma_i & \text{dans } \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega_i} . \end{cases}$$

Chaque  $u_{\Omega_i}$  est harmonique dans  $\mathbb{R}^3 \setminus \partial\Omega_i$ . Notons que dans le cas de notre modèle de tête à couches imbriquées, une couche ne possède de frontière commune qu'avec deux couches. On a donc  $\partial\Omega_i = S_{i-1} \cup S_i$ . En utilisant l'orientation des normales décrite par la figure 2.3, les conditions de saut sur le potentiel donnent

$$[u_{\Omega_i}]_i = V_{S_i}, \quad [u_{\Omega_i}]_{i-1} = -V_{S_{i-1}}, \quad (2.14a)$$

et les conditions de saut sur la dérivée du potentiel donnent

$$[\partial_{\mathbf{n}} u_{\Omega_i}]_i = (\partial_{\mathbf{n}} V)_{S_i}^-, \quad [\partial_{\mathbf{n}} u_{\Omega_i}]_{i-1} = -(\partial_{\mathbf{n}} V)_{S_{i-1}}^+. \quad (2.14b)$$

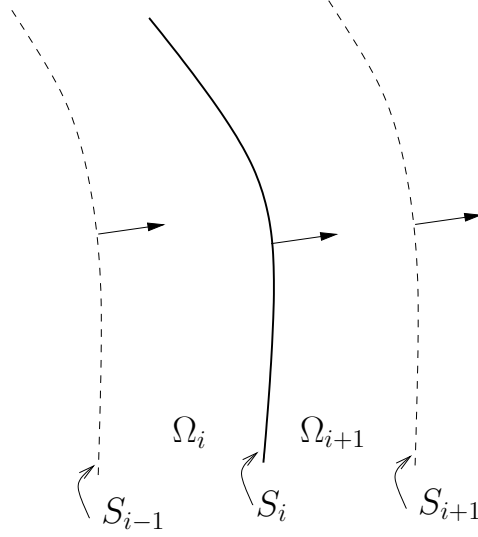


FIG. 2.3 – Orientation du modèle à couches imbriquées. Les normales sont orientées globalement vers l'extérieur. Cependant, quand on considère le volume  $\Omega_i$ , il convient d'orienter les normales de sorte à ce qu'elles soient sortantes à ce volume. C'est-à-dire qu'il est nécessaire d'inverser la normale à  $S_{i-1}$

Pour simplifier les notations, on définit  $p_{S_i} = \sigma_i[\partial_{\mathbf{n}} u_{\Omega_i}]_i = \sigma_i(\partial_{\mathbf{n}} V)_{S_i}^-$ . Notons que (2.2) implique que  $p_{S_i} = \sigma_i(\partial_{\mathbf{n}} V)_{S_i}^- = \sigma_{i+1}(\partial_{\mathbf{n}} V)_{S_i}^+$  sur l'interface  $S_i$ . Comme  $u_i$  est harmonique dans  $\Omega \setminus \partial\Omega_i$  et qu'elle vérifie l'hypothèse  $\mathcal{H}$ , on peut appliquer le Théorème 1 pour obtenir la limite interne de  $u_{\Omega_i}$  sur  $S_i$ .

$$(u_{\Omega_i})_{S_i}^- = \frac{[u_{\Omega_i}]_{\partial\Omega_i}}{2} - \mathcal{D}_{\partial\Omega_i}[u_{\Omega_i}]_{\partial\Omega_i} + \mathcal{S}_{\partial\Omega_i}[\partial_{\mathbf{n}} u_{\Omega_i}]_{\partial\Omega_i}$$

On sépare ensuite les termes de saut à travers  $\partial\Omega_i = S_{i-1} \cup S_i$  en deux parties, l'une correspondant à  $S_{i-1}$  et l'autre à  $S_i$ . Puis on réinjecte l'identité (2.14a).

$$(u_{\Omega_i})_{S_i}^- = (V - v_{\Omega_i}/\sigma_i)_{S_i}^- = \frac{V_{S_i}}{2} + \mathcal{D}_{i,i-1}V_{S_{i-1}} - \mathcal{D}_{ii}V_{S_i} - \sigma_i^{-1}\mathcal{S}_{i,i-1}p_{S_{i-1}} + \sigma_i^{-1}\mathcal{S}_{ii}p_{S_i} \quad (2.15)$$

De la même manière, on exprime grâce au Théorème 1 la limite externe de  $u_{\Omega_i}$  en  $S_i$

$$(u_{\Omega_{i+1}})_{S_i}^+ = -\frac{[u_{\Omega_{i+1}}]_{\partial\Omega_{i+1}}}{2} - \mathcal{D}_{\partial\Omega_{i+1}}[u_{\Omega_{i+1}}]_{\partial\Omega_{i+1}} + \mathcal{S}_{\partial\Omega_{i+1}}[\partial_{\mathbf{n}} u_{\Omega_{i+1}}]_{\partial\Omega_{i+1}}.$$

Compte tenu que  $\partial\Omega_{i+1} = S_i \cup S_{i+1}$ , on sépare là encore les termes de saut en deux parties : l'une correspondant à  $S_i$  et l'autre à  $S_{i+1}$ . Enfin on applique également l'identité (2.14a). On obtient

$$(u_{\Omega_{i+1}})_{S_i}^+ = (V - v_{\Omega_{i+1}}/\sigma_{i+1})_{S_i}^+ = \frac{V_{S_i}}{2} + \mathcal{D}_{ii}V_{S_i} - \mathcal{D}_{i,i+1}V_{S_{i+1}} - \sigma_{i+1}^{-1}\mathcal{S}_{ii}p_{S_i} + \sigma_{i+1}^{-1}\mathcal{S}_{i,i+1}p_{S_{i+1}}. \quad (2.16)$$

Les fonctions  $V, v_{\Omega_{i+1}}$  et  $v_{\Omega_i}$  étant continues, leurs sauts sur  $S_i$  sont nuls. On a donc

$$(2.16) - (2.15) = (u_{\Omega_{i+1}})_{S_i}^+ - (u_{\Omega_i})_{S_i}^- = \sigma_{i+1}^{-1}(v_{\Omega_{i+1}})_{S_i} - \sigma_i^{-1}(v_{\Omega_i})_{S_i},$$

soit

$$\begin{aligned} \sigma_{i+1}^{-1}(v_{\Omega_{i+1}})_{S_i} - \sigma_i^{-1}(v_{\Omega_i})_{S_i} &= \mathcal{D}_{i,i-1}V_{S_{i-1}} - 2\mathcal{D}_{ii}V_{S_i} + \mathcal{D}_{i,i+1}V_{S_{i+1}} \\ &\quad - \sigma_i^{-1}\mathcal{S}_{i,i-1}p_{S_{i-1}} + (\sigma_i^{-1} + \sigma_{i+1}^{-1})\mathcal{S}_{ii}p_{S_i} - \sigma_{i+1}^{-1}\mathcal{S}_{i,i+1}p_{S_{i+1}} \quad \text{pour } i = 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (2.17)$$

De manière analogue, on évalue les quantités  $(\sigma_i \partial_{\mathbf{n}} u_{\Omega_i})_{S_i}^- = (p - \partial_{\mathbf{n}} v_{\Omega_i})_{S_i}^-$  et  $(\sigma_{i+1} \partial_{\mathbf{n}} u_{\Omega_{i+1}})_{S_i}^+ = (p - \partial_{\mathbf{n}} v_{\Omega_{i+1}})_{S_i}^+$  en utilisant le Théorème 1. On soustrait la première quantité à la seconde et on obtient

$$\begin{aligned} (\partial_{\mathbf{n}} v_{\Omega_{i+1}})_{S_i} - (\partial_{\mathbf{n}} v_{\Omega_i})_{S_i} &= \sigma_i \mathcal{N}_{i,i-1}V_{S_{i-1}} - (\sigma_i + \sigma_{i+1})\mathcal{N}_{ii}V_{S_i} + \sigma_{i+1}\mathcal{N}_{i,i+1}V_{S_{i+1}} \\ &\quad - \mathcal{D}_{i,i-1}^*p_{S_{i-1}} + 2\mathcal{D}_{ii}^*p_{S_i} - \mathcal{D}_{i,i+1}^*p_{S_{i+1}} \quad \text{pour } i = 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (2.18)$$

(2.18) et (2.17) forment là encore un système linéaire d'équations intégrales. Ce système est différent de ceux des approches précédentes en ce qu'il est symétrique et diagonal par bloc. En effet, on peut constater dans les équations (2.17) et (2.18) que chaque surface  $S_j$  n'interagit qu'avec ses deux surfaces voisines  $S_{j-1}$  et  $S_{j+1}$ . Quand l'une de ces deux surfaces n'existe pas, on prendra soin d'annuler tous les termes s'y rattachant. On annulera également les termes se rattachant à  $p_N$  compte tenu du fait que  $\sigma_{N+1} = 0$ . Comme nous le verrons plus loin, cela revient à supprimer la dernière ligne et la dernière colonne du système une fois discrétisé.

## 2.5 Discrétisation et implémentation

Techniquement, les surfaces  $S_j$  sont obtenues par segmentation d'image IRM anatomique. Tous les algorithmes et outils logiciels permettant de remplir cette tâche fournissent les interfaces soit, la plupart du temps, sous forme de surfaces triangulées, soit par une représentation implicite (fonction distance à la surface). Les maillages triangulaires ont aussi la qualité (que nous exploitons) de pouvoir donner naissance à des formules analytiques pour bon nombre de calculs.

Pour discrétiser les équations (2.11), (2.12) et (2.17), (2.18), nous utilisons le très classique cadre de la méthode de Galerkin.

### 2.5.1 Formulation simple couche

**Discrétisation** Pour discrétiser l'équation (2.11), on décompose les inconnues  $\xi_{S_k}$  sur chaque  $S_k$  dans une base de fonctions P0 ou P1.

$$\xi_{S_k}(\mathbf{r}) = \sum_i x_i^{(k)} \varphi_i^{(k)}(\mathbf{r}) \quad (2.19)$$

$\varphi_i^{(k)}$  est la  $i^{\text{ème}}$  fonction de base sur la surface  $S_k$ . On utilise comme fonctions de test les fonctions de base  $\varphi_i^{(k)}$ . Ainsi, pour obtenir le système discrétisé, il convient d'introduire la décomposition (2.19) dans (2.11) et d'en prendre le produit scalaire avec une fonction test. Cela donne

$$\langle \partial_{\mathbf{n}} v_s, \varphi_i^{(k)} \rangle = \frac{\sigma_k + \sigma_{k+1}}{2(\sigma_{k+1} - \sigma_k)} \left( \sum_j x_j^{(k)} \langle \varphi_i^{(k)}, \varphi_j^{(k)} \rangle \right) - \sum_{l=1}^N \sum_j x_j^{(l)} \langle \mathcal{D}_{lk}^* \varphi_j^{(l)}, \varphi_i^{(k)} \rangle, \quad (2.20)$$

ce qui se réécrit sous la forme matricielle :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} J_1 + D_{11}^* & D_{12}^* & D_{13}^* & \cdots & D_{1,N}^* \\ D_{21}^* & J_2 + D_{22}^* & D_{23}^* & \cdots & D_{2,N}^* \\ D_{31}^* & D_{32}^* & J_3 + D_{33}^* & \cdots & D_{3,N}^* \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_{N,1}^* & D_{N,2}^* & D_{N,3}^* & \cdots & J_N + D_{N,N}^* \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{x}}_1 \\ \underline{\mathbf{x}}_2 \\ \underline{\mathbf{x}}_3 \\ \vdots \\ \underline{\mathbf{x}}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{b}}_1 \\ \underline{\mathbf{b}}_2 \\ \underline{\mathbf{b}}_3 \\ \vdots \\ \underline{\mathbf{b}}_N \end{bmatrix}. \quad (2.21)$$

Les sous-matrices  $\mathbf{J}$  qui sont diagonales dans le cas P0 et bande-diagonale dans le cas P1 sont données par

$$(\mathbf{J}_k)_{ij} = \frac{\sigma_k + \sigma_{k+1}}{2(\sigma_{k+1} - \sigma_k)} \langle \varphi_i^{(k)}, \varphi_j^{(k)} \rangle.$$

Les sous-matrices  $\mathbf{D}^*$  sont données par

$$(\mathbf{D}_{kl}^*)_{ij} = -\langle \mathcal{D}_{kl}^* \varphi_j^{(l)}, \varphi_i^{(k)} \rangle$$

et les sous-vecteurs  $\underline{\mathbf{b}}$  et  $\underline{\mathbf{x}}$  par

$$(\underline{\mathbf{b}}_k)_i = \langle \partial_{\mathbf{n}} v_s, \varphi_i^{(k)} \rangle, \quad (\underline{\mathbf{x}}_k)_i = x_i^{(k)}.$$

**Implémentation** Le calcul de  $(\mathbf{D}_{kl}^*)_{ij}$  nécessite le calcul d'une intégrale double dont la plus interne est calculable analytiquement [119, 32, 39] (cf B.1.2). La seconde intégration est numérique, ce qui se calcule de la manière la plus efficace possible à l'aide d'une quadrature de Gauss adaptée aux triangles [17, 76]. Le point délicat provient du calcul des quantités  $(\mathbf{D}_{kk}^*)_{ii}$ . En effet, pour ces termes, l'opérateur  $\mathcal{D}^*$  présente une singularité. La plupart des auteurs se servent d'une relation d'angle solide pour déduire leurs valeurs (voir par exemple [38]).

La matrice résultante  $\mathbf{A}$  est pleine et non symétrique. La résolution du système (2.21) tel quel n'est pas possible car la matrice  $\mathbf{A}$  est singulière. Pour la déflater<sup>1</sup>, il faut imposer une relation linéaire de plus entre les  $\underline{\mathbf{x}}_j$ . Nous utilisons comme relation supplémentaire  $\langle \xi, 1 \rangle = 0$ . Pour les bases de fonction P0 et P1 que nous utilisons (et même pour toute base de fonctions formant une partition de l'unité) cela revient à  $\sum_i x_i^{(k)} = 0$  sur chaque  $S_k$ , ce qui implique  $\sum_{ik} x_i^{(k)} = 0$ . Pour imposer cette relation supplémentaire, on remplace  $\mathbf{A}$  par  $\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \omega \mathbf{1}^T \mathbf{1}$  (où  $\omega$  est un réel choisi de telle sorte que  $\mathbf{A}'$  soit bien conditionnée). Un choix optimal est possible pour  $\omega$  mais il est trop coûteux et peut être approximé [110, 40]. A la place, on utilise le fait que la matrice  $\mathbf{A}$  est à diagonale dominante et que le premier élément de cette diagonale en est une grandeur caractéristique. Finalement, on a

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + (\mathbf{A})_{11} / M \mathbf{1}^T \mathbf{1}$$

où  $M$  est le nombre total d'inconnues.

Une fois le système  $\mathbf{A}' \underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{b}}$  résolu et  $\underline{\mathbf{x}}$  connu, on obtient le potentiel  $V$  par

$$V(\mathbf{r}) = v_d(\mathbf{r}) + \sum_{l=1}^{N-1} \sum_j x_j^{(l)} \left( \mathcal{S}_{lk} \varphi_j^{(l)} \right)(\mathbf{r}) \quad \text{pour } \mathbf{r} \in S_k. \quad (2.22)$$

<sup>1</sup>déflater (*deflat*) une matrice consiste à la rendre inversible avec le meilleur conditionnement possible

## 2.5.2 Formulation double couche

**Discrétisation** On utilise ici exactement la même discrétisation que dans le cas simple couche. On décompose  $V_{S_k}$  sur  $S_k$  dans une base de fonctions  $\varphi_i^{(k)}$  P0 ou P1

$$V_{S_k}(\mathbf{r}) = \sum_i x_i^{(k)} \varphi_i^{(k)}(\mathbf{r}).$$

On injecte cette décomposition dans l'équation (2.12) et on intègre le résultat contre une des fonctions test (égale aux fonctions de bases comme précédemment).

$$\left\langle \sum_{l=1}^N v_{\Omega_l}, \varphi_i^{(k)} \right\rangle = \frac{\sigma_k + \sigma_{k+1}}{2} \left( \sum_j x_j^{(k)} \langle \varphi_i^{(k)}, \varphi_j^{(k)} \rangle \right) - \sum_{l=1}^N (\sigma_{l+1} - \sigma_l) \sum_j x_j^{(l)} \langle \mathcal{D}_{kl} \varphi_j^{(l)}, \varphi_i^{(k)} \rangle \quad (2.23)$$

soit, sous forme matricielle

$$\underbrace{\begin{bmatrix} J_1 + D_{11} & D_{12} & D_{13} & \dots & D_{1,N} \\ D_{21} & J_2 + D_{22} & D_{23} & \dots & D_{2,N} \\ D_{31} & D_{32} & J_3 + D_{33} & \dots & D_{3,N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_{N,1} & D_{N,2} & D_{N,3} & \dots & J_N + D_{N,N} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{x}}_1 \\ \underline{\mathbf{x}}_2 \\ \underline{\mathbf{x}}_3 \\ \vdots \\ \underline{\mathbf{x}}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{b}}_1 \\ \underline{\mathbf{b}}_2 \\ \underline{\mathbf{b}}_3 \\ \dots \\ \underline{\mathbf{b}}_N \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

avec

$$\begin{aligned} (J_k)_{ij} &= \frac{\sigma_k + \sigma_{k+1}}{2} \langle \varphi_i^{(k)}, \varphi_j^{(k)} \rangle, \\ (D_{kl})_{ij} &= -(\sigma_{l+1} - \sigma_l) \langle \mathcal{D}_{kl} \varphi_j^{(l)}, \varphi_i^{(k)} \rangle, \\ (\underline{\mathbf{b}}_k)_i &= \left\langle \sum_{l=1}^N v_{\Omega_l}, \varphi_i^{(l)} \right\rangle, \quad (\underline{\mathbf{x}}_k)_i = x_i^{(k)} \end{aligned}$$

**Implémentation** Grâce à la dualité entre  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}^*$ , le calcul des blocs  $D_{lk}$  et l'assemblage de la matrice sont menés en utilisant les mêmes considérations que dans le cas simple couche. En pratique, pour assembler un bloc  $D_{i,j}$ , on assemble un bloc  $D_{i,j}^*$  que l'on transpose. La matrice  $\mathbf{A}$  obtenue est à nouveau pleine et non symétrique. Le potentiel électrique étant une grandeur physique définie à une constante près, la matrice  $\mathbf{A}$  doit, là aussi, être déflatée. Il est délicat de traduire sur la matrice  $\mathbf{A}$ , l'hypothèse  $\mathcal{H}$  que nous avons fait sur les potentiels. Par soucis de simplicité, on préfère imposer une moyenne (spatiale) nulle au potentiel global :  $\sum_{k=1}^N \sum_i x_i^{(k)} = 0$ . En pratique, on se contente d'imposer une moyenne nulle au potentiel de la couche externe  $\sum_i x_i^{(N)} = 0$ , c'est suffisant. Il suffit, pour ce faire, de déflater uniquement le dernier terme de la diagonale, à savoir :  $J_N + D_{N,N}$ . Le potentiel est directement obtenu par résolution du système déflaté et aucune étape additionnelle n'est requise.

## 2.5.3 Formulation symétrique

**Discrétisation** L'approche symétrique ne peut pas être discrétisée de manière aussi immédiate que les deux précédentes approches. Ici, les deux grandeurs physiques  $V$  et

$p$  sont présentes et aucune des deux erreurs d'approximation associées ne doit dominer l'autre. Dans le cas contraire, un effort inutile (en temps de calcul) serait fourni. Pour parvenir à cet objectif nous utilisons une discrétisation mixte.  $V$  est discrétisé dans des bases de fonctions P1 alors que  $p$  est discrétisé dans une base de fonction P0.  $p$  est une dérivée de  $V$  au même titre qu'une fonction P0 est une dérivée d'une fonction P1.

Les mêmes préoccupations président au choix des fonctions de test. Les opérateurs  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}^*$  ne changent pas la régularité de la fonction à laquelle ils s'appliquent (une dérivation contre une intégration). Ces opérateurs sont donc testés contre les fonctions de base servant à la discrétisation de leur opérande. L'opérateur  $\mathcal{S}$ , quant à lui, est régularisant (une intégration contre zéro dérivation). Il est donc testé contre des fonctions P1 pour un opérande discrétisé sur une base de fonctions P0. L'opérateur  $\mathcal{N}$ , enfin, est un abaisseur de régularité (une intégration contre deux dérivations). Il est testé contre des fonctions P0 pour un opérande discrétisé en P1.

Dans ce qui suit, les fonctions P0 sur  $S_k$  sont notées  $\psi_i^{(k)}$  et les fonctions P1 sur la même interface sont notées  $\phi_i^{(k)}$ .

Conformément à ce qui est écrit plus haut, l'équation de la formulation symétrique concernant le potentiel (discrétisé à l'aide d'une base de fonctions P1) est testée contre une fonction P0.

$$\begin{aligned} \langle \sigma_{k+1}^{-1} v_{\Omega_{k+1}} - \sigma_k^{-1} v_{\Omega_k}, \psi_i^{(k)} \rangle = & \\ & \sum_j x_j^{(k-1)} \langle \mathcal{D}_{k,k-1} \phi_j^{(k-1)}, \psi_i^{(k)} \rangle - 2 \sum_j x_j^{(k)} \langle \mathcal{D}_{kk} \phi_j^{(k)}, \psi_i^{(k)} \rangle + \\ & + \sum_j x_j^{(k+1)} \langle \mathcal{D}_{k,k+1} \phi_j^{(k+1)}, \psi_i^{(k)} \rangle - \sigma_k^{-1} \sum_j y_j^{(k-1)} \langle \mathcal{S}_{k,k-1} \psi_j^{(k-1)}, \psi_i^{(k)} \rangle + \\ & + (\sigma_k^{-1} + \sigma_{k+1}^{-1}) \sum_j y_j^{(k)} \langle \mathcal{S}_{kk} \psi_j^{(k)}, \psi_j^{(k)} \rangle - \sigma_{k+1}^{-1} \sum_j y_j^{(k+1)} \langle \mathcal{S}_{k,k+1} \psi_j^{(k+1)}, \psi_j^{(k)} \rangle, \end{aligned}$$

L'équation concernant le flux (discrétisé à l'aide d'une base de fonctions P0) est testée contre une fonction P1.

$$\begin{aligned} \langle \partial_{\underline{n}} v_{\Omega_{k+1}} - \partial_{\underline{n}} v_{\Omega_k}, \phi_i^{(k)} \rangle = & \\ & \sigma_k \sum_j x_j^{(k-1)} \langle \mathcal{N}_{k,k-1} \phi_j^{(k-1)}, \phi_i^{(k)} \rangle - (\sigma_k + \sigma_{k+1}) \sum_j x_j^{(k)} \langle \mathcal{N}_{kk} \phi_j^{(k)}, \phi_i^{(k)} \rangle + \\ & + \sigma_{k+1} \sum_j x_j^{(k+1)} \langle \mathcal{N}_{k,k+1} \phi_j^{(k+1)}, \phi_i^{(k)} \rangle - \sum_j y_j^{(k-1)} \langle \mathcal{D}_{k,k-1}^* \psi_j^{(k-1)}, \phi_i^{(k)} \rangle + \\ & + 2 \sum_j y_j^{(k)} \langle \mathcal{D}_{kk}^* \psi_j^{(k)}, \phi_j^{(k)} \rangle - \sum_j y_j^{(k+1)} \langle \mathcal{D}_{k,k+1}^* \psi_j^{(k+1)}, \phi_j^{(k)} \rangle, \end{aligned}$$

Les deux équations précédentes sont vérifiées sur toutes les interfaces  $k = 1, \dots, N$  et comme précédemment, les termes d'indices inadéquats (i.e.  $k < 1$  ou  $k > n$ ) sont considérés comme nuls. Ces deux équations s'écrivent sous forme matricielle de la manière

suivante :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} (\sigma_1+\sigma_2)\mathbf{N}_{11} & -2\mathbf{D}_{11}^* & -\sigma_2\mathbf{N}_{12} & \mathbf{D}_{12}^* & & & \\ -2\mathbf{D}_{11} & (\sigma_1^{-1}+\sigma_2^{-1})\mathbf{S}_{11} & \mathbf{D}_{12} & -\sigma_2^{-1}\mathbf{S}_{12} & & & \\ -\sigma_2\mathbf{N}_{21} & \mathbf{D}_{21}^* & (\sigma_2+\sigma_3)\mathbf{N}_{22} & -2\mathbf{D}_{22}^* & -\sigma_3\mathbf{N}_{23} & \mathbf{D}_{23}^* & \\ \mathbf{D}_{21} & -\sigma_2^{-1}\mathbf{S}_{21} & -2\mathbf{D}_{22} & (\sigma_2^{-1}+\sigma_3^{-1})\mathbf{S}_{22} & \mathbf{D}_{23} & -\sigma_3^{-1}\mathbf{S}_{23} & \\ & & -\sigma_3\mathbf{N}_{32} & \mathbf{D}_{32}^* & (\sigma_3+\sigma_4)\mathbf{N}_{33} & -2\mathbf{D}_{33}^* & \dots \\ & & \mathbf{D}_{32} & -\sigma_3^{-1}\mathbf{S}_{32} & -2\mathbf{D}_{33} & (\sigma_3^{-1}+\sigma_4^{-1})\mathbf{S}_{33} & \dots \\ & & & & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{\mathbf{x}}_1 \\ \underline{\mathbf{y}}_1 \\ \underline{\mathbf{x}}_2 \\ \underline{\mathbf{y}}_2 \\ \underline{\mathbf{x}}_3 \\ \underline{\mathbf{y}}_3 \\ \vdots \end{bmatrix}}_{\underline{\mathbf{w}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{\mathbf{b}}_1 \\ \underline{\mathbf{c}}_1 \\ \underline{\mathbf{b}}_2 \\ \underline{\mathbf{c}}_2 \\ \underline{\mathbf{b}}_3 \\ \underline{\mathbf{c}}_3 \\ \vdots \end{bmatrix}}_{\underline{\mathbf{z}}} \quad (2.25)$$

avec

$$\begin{aligned} (\mathbf{N}_{kl})_{ij} &= \langle \mathcal{N}_{kl}\phi_j^{(l)}, \phi_i^{(k)} \rangle, & (\mathbf{S}_{kl})_{ij} &= \langle \mathcal{S}_{kl}\psi_j^{(l)}, \psi_i^{(k)} \rangle, \\ (\mathbf{D}_{kl})_{ij} &= (\mathbf{D}_{lk}^*)_{ji} = \langle \mathcal{D}_{kl}\phi_j^{(l)}, \psi_i^{(k)} \rangle, \\ (\underline{\mathbf{b}}_k)_i &= \langle \partial_{\mathbf{n}} v_k - \partial_{\mathbf{n}} v_{k+1}, \phi_i^{(k)} \rangle, & (\underline{\mathbf{c}}_k)_i &= \langle \sigma_{k+1}^{-1} v_{\Omega_{k+1}} - \sigma_k^{-1} v_{\Omega_k}, \psi_i^{(k)} \rangle, \\ (\underline{\mathbf{x}}_k)_i &= x_i^{(k)}, & (\underline{\mathbf{y}}_k)_i &= y_i^{(k)}. \end{aligned}$$

Notons, qu'afin de tenir compte de la conductivité nulle du domaine externe ( $\sigma_{N+1} = 0$ ), il faut tronquer la dernière ligne et la dernière colonne de la matrice  $\mathbf{A}$  telle que décrite ci-dessus.

**Implémentation** Le calcul des blocs  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}^*$  a déjà été abordé pour les précédentes formulations et son implémentation dans le cas symétrique ne nécessite aucune autre considération. Celui des blocs  $\mathcal{S}$  est traité de la même manière avec une intégration exacte (cf. B.1.3) et une intégration numérique.

Enfin, le calcul des blocs  $\mathcal{N}$  est immédiat grâce au théorème 6 de l'annexe B qui permet d'exprimer la valeur des blocs  $\mathcal{N}$  en fonction de la valeur des blocs  $\mathcal{S}$ .

Une fois assemblée, la matrice  $\mathbf{A}$  a, elle aussi, besoin d'être déflatée. Cela provient à nouveau de la nécessité physique de fixer un potentiel de référence. Nous procédons de la même manière qu'en (2.5.2) : le dernier bloc diagonal  $\mathbf{N}_{N,N}$  est modifié en  $\mathbf{N}_{N,N} + \omega \mathbf{1}^T \mathbf{1}$  avec  $\omega = (\mathbf{N}_{N,N})_{11} / M_N$ . On note  $\mathbf{A}'$ , la nouvelle matrice ainsi obtenue. Cette dernière est symétrique et diagonale par blocs. Bien que sa taille soit supérieure à celle des matrices des formulations simple et double couche, sa structure particulière compense, dans les faits, ce désavantage. Tout comme pour la formulation double couche, le potentiel fait partie des inconnues et aucune étape additionnelle n'est donc nécessaire à son obtention.

## 2.6 Expériences numériques

Les approches simple couche, double couche et symétrique ont été implémentées. Pour les deux premières, on considère trois niveaux de discrétisation différents. Tout d'abord la collocation, qui est un cas particulier de discrétisation de Galerkin, où l'on utilise des bases de fonctions P0 et où les fonctions de test sont des masses de Dirac  $\delta_{\mathbf{x}_j}$  au milieu des triangles. Les deux autres consistent à prendre les mêmes bases pour la représentation des inconnues et pour les fonctions test : successivement les bases P0 et P1. La méthode symétrique, quant à elle, a été discrétisée d'une manière unique, décrite en 2.4.4 : le potentiel est discrétisé dans une base de fonctions P1 alors que sa dérivée normale l'est

dans une base de fonctions P0. Un résumé de ces configurations se trouvent dans la table 2.1.

TAB. 2.1 – Les différentes méthodes et discrétisations et leurs labels.

Label	Formulation	Inconnues	Fonctions de Test
1a	Simple Couche	P0	Dirac
1b		P0	P0
1c		P1	P1
2a	Double Couche	P0	Dirac
2b		P0	P0
2c		P1	P1
3	Symétrique	P0	P1

### 2.6.1 Implémentation, mémoire, vitesse

Tous les programmes ont été écrits en C++. Les calculs matriciels ont été codés à l'aide de bibliothèques BLAS et LAPACK optimisées.

Dans la table 2.2 sont présentés à titre indicatif pour chaque modèle de tête les temps d'assemblage des matrices de la formulation symétrique, leur occupation mémoire, le temps d'inversion d'un système avec une méthode itérative de type GMRES, le temps d'inversion de la matrice entière à l'aide d'une décomposition LU et le nombre de problèmes directs au delà duquel la méthode d'inversion directe est plus rentable que son homologue itérative.

L'assemblage de la matrice du système intégral n'est pas d'un coût rédhibitoire car il est en général amorti par le calcul de plusieurs problèmes directs à géométrie (donc sujet) fixée. Pour ce qui est des différences de coût entre les différentes approches, l'approche simple couche nécessite deux fois plus de calculs que son homologue double couche, car deux matrices doivent être assemblées (cf 2.4.2). De par sa structure, le temps d'assemblage de la matrice de l'approche symétrique ne peut pas être comparé, de manière générale, à ceux des autres approches. La méthode de collocation est dix fois plus rapide à l'assemblage que les autres méthodes (voire même plus suivant le nombre de points de Gauss utilisés pour l'intégration numérique).

Pour l'inversion du système, deux stratégies sont possibles suivant le nombre de problèmes directs que l'on souhaite résoudre à géométrie fixée. Si ce nombre est grand et si les capacités en termes de puissance de calcul et de mémoire le permettent, il est plus intéressant d'inverser la matrice du système une fois pour toute (ou d'en calculer une décomposition du type LU par exemple). Cette opération présente un coût élevé mais fixe qui ne dépend que de la taille de la matrice. Si les ressources informatiques sont insuffisantes ou si l'on ne désire procéder qu'à un nombre restreint de résolutions du système intégral, une méthode itérative sera plus adaptée. Son coût est beaucoup plus restreint dans ce cadre mais le temps de résolution du système dépend alors du conditionnement de la matrice, du vecteur initial et du second membre. On notera que, lorsqu'elle est possible, l'inversion directe du système est souvent très rentable du fait que les bibliothèques utilisées pour les décompositions matricielles (BLAS niveau 3) parviennent à tirer un rendement bien supérieur des processeurs (en terme d'opérations à la seconde) qu'un algorithme de type itératif.



La seule contrainte mémoire de tous ces calculs est imposée par la taille de la matrice du système qui doit pouvoir tenir en mémoire RAM. En effet, des algorithmes de calcul *Out of Core* existent et permettraient de mener ces calculs pour des maillages très détaillés (notamment, la résolution du système). Nous n'avons pas eu besoin d'y recourir.

TAB. 2.2 – Temps de calcul pour la méthode symétrique pour un processeur AMD Opteron 1.8 GHz sous Linux Fedora Core 4 64 bit

nombre de sommets	assemblage	taille de la matrice	inversion itérative	inversion directe	seuil de rentabilité
$42 \times 3$	0.2 sec.	0.3 Mo	0.014 sec.	0.08 sec.	6
$162 \times 3$	2.4 sec.	4.9 Mo	0.28 sec.	2.3 sec.	9
$642 \times 3$	57 sec.	77 Mo	8.6 sec.	173 sec.	21
$2562 \times 3$	1 h. 10 min.	1200Mo	273 sec.	3 h. 5 sec.	40

### 2.6.2 Cas tests

Nous avons mené une série d'expériences sur des géométries sphériques triangulées avec 42, 162, 642 et 2562 sommets. Nous avons fait ce choix car des solutions analytiques existent dans ce cas [31, 125, 86], permettant ainsi une comparaison absolue entre les différentes méthodes.

Nous avons réalisé deux types d'expériences.

Premièrement, avec une sphère unique de rayon 1.0 séparant un milieu interne de conductivité unité et un milieu externe de conductivité nulle.

Deuxièmement, avec 3 sphères concentriques de rayons 0.87, 0.92 et 1.0 délimitant 4 volumes de conductivités respectives 1.0, 0.0125, 1.0 et 0.0 de l'intérieur vers l'extérieur. Les sources étaient des dipôles de moment  $[1\ 0\ 1]/\sqrt{2}$  disposés sur l'axe  $x$  à des distances respectives de l'origine de 0.425, 0.68, 0.765, 0.8075 et 0.8415.

Pour les comparaisons, nous avons choisi d'évaluer les solutions analytiques au centre des triangles pour les solutions P0 et à leurs sommets pour les méthodes P1. Nous avons utilisé l'erreur relative  $\ell_2$  définie par  $\varepsilon = \|\mathbf{v}_{\text{anal}} - \mathbf{v}_{\text{num}}\|_{\ell_2} / \|\mathbf{v}_{\text{anal}}\|_{\ell_2}$ , en s'assurant auparavant que  $\mathbf{v}_{\text{anal}}$  et  $\mathbf{v}_{\text{num}}$  sont de moyenne nulle<sup>2</sup>.

### 2.6.3 Résultats

#### Sensibilité à la proximité d'une interface

On observe ici l'erreur en fonction de la distance du dipôle source à l'interface. La formulation symétrique se comporte ici beaucoup mieux que toutes les autres approches dans la configuration à 3 sphères. Dans le cas d'une simple sphère, la situation est inversée.

#### Sensibilité à la finesse du maillage

Dans ce test on considère un dipôle donné ( $r = 0.765$ ) et on s'intéresse à l'erreur en fonction de la finesse du maillage. Comme la théorie de Galerkin le prévoit, toutes les

<sup>2</sup>quitte à corriger, le potentiel étant défini à une constante près.

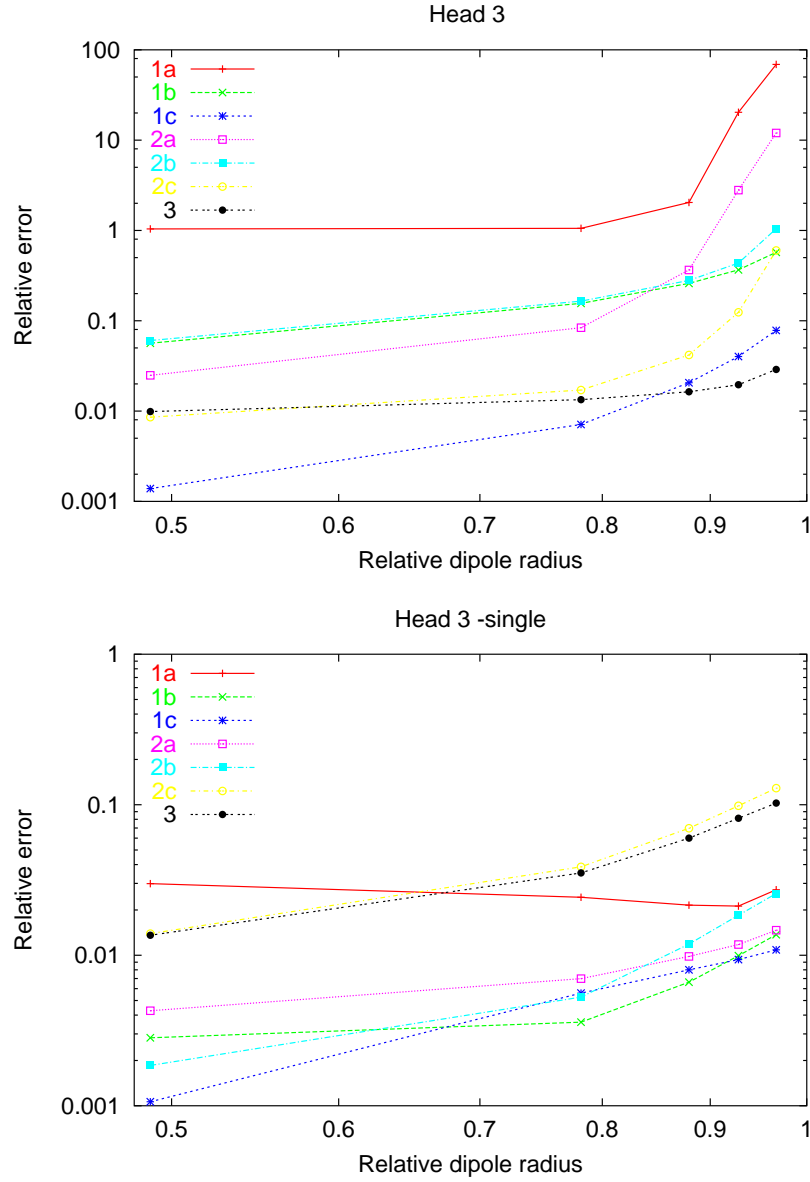


FIG. 2.4 – L'erreur relative  $\varepsilon$  en fonction de l'excentricité du dipôle source  $r$  pour le maillage sphérique à 642 sommets. En haut : la configuration à 3 sphères concentriques. En bas : la configuration à une seule sphère. Pour la signification de la légende, se reporter à la Table 2.1

erreurs diminuent lorsque le nombre de sommets augmente. Dans la configuration à trois sphères, la hiérarchie théorique est respectée. La méthode de collocation est en dehors de son domaine d'utilisation et fournit des résultats non significatifs. Les méthodes P0 se montrent plus fiables et les méthodes P1, encore plus fiables. La décroissance de l'erreur en fonction de la finesse du maillage est d'autant plus forte pour les approximations P1. La méthode symétrique, comme dans le test précédent, se montre la plus précise. Dans le cas d'une simple sphère, les résultats sont plus difficiles à interpréter et, là encore, la méthode symétrique est en retrait et présente une précision comparable aux méthodes de collocation.

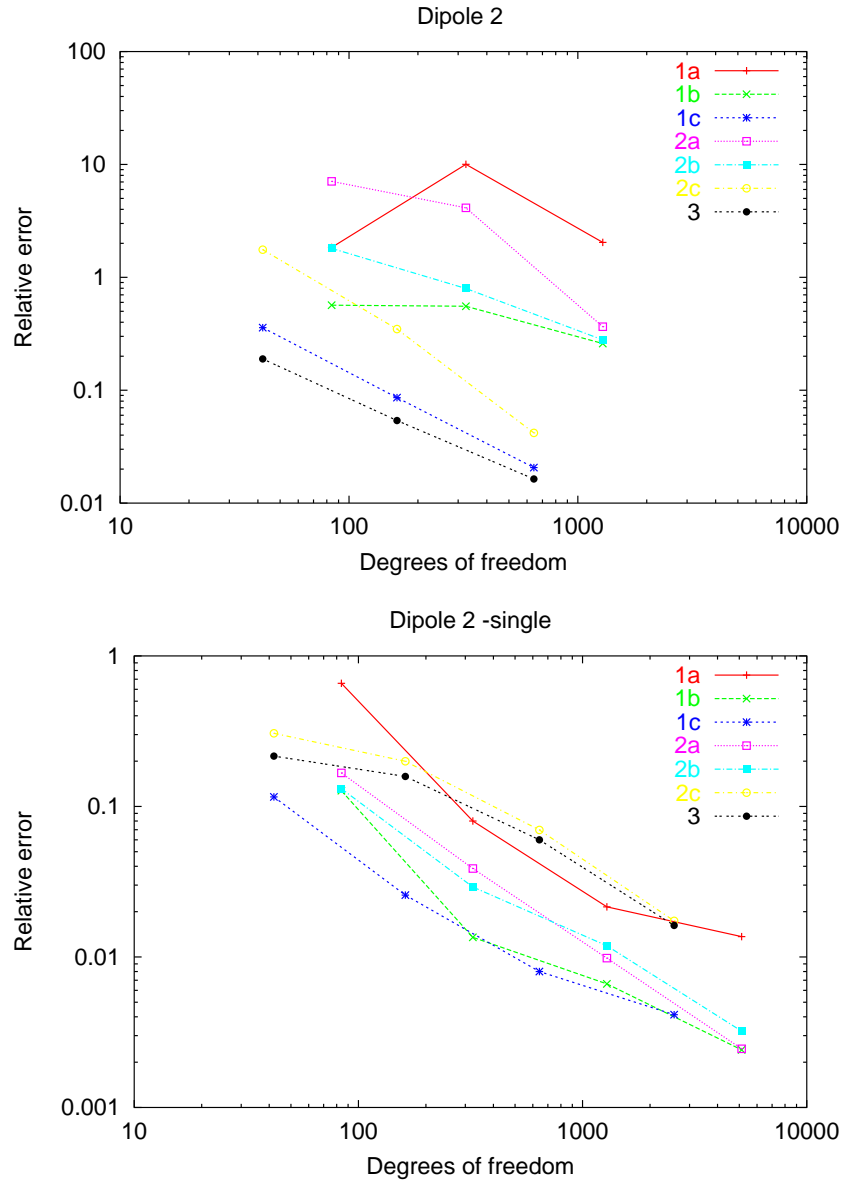


FIG. 2.5 – L'erreur relative en fonction du nombre de degrés de liberté du système pour un dipôle source à  $r = 0.765$ . En haut : la configuration à 3 sphères concentriques. En bas : la configuration à une seule sphère. Les deux méthodes de collocation sont, dans ce cas, hors de leur domaine d'utilisation et fournissent des résultats incohérents. Pour la signification de la légende, se reporter à la Table 2.1

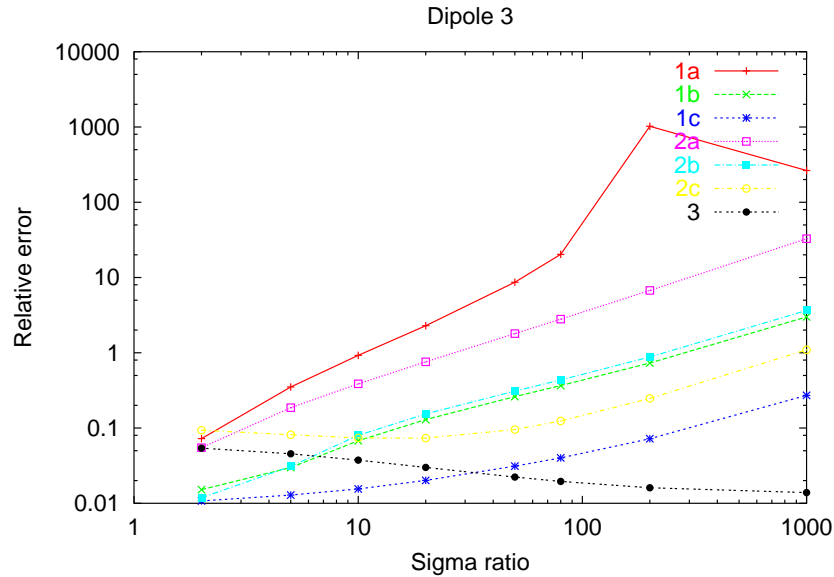


FIG. 2.6 – L’erreur relative en fonction du rapport des conductivités entre deux couches voisines, pour un dipôle source à  $r = 0.8075$  et des maillages de 642 sommets. Pour la signification de la légende, se reporter à la Table 2.1

### Sensibilité à la conductivité

On regarde ici comment varie l’erreur lorsque l’on fait varier la conductivité de la deuxième des trois couches du modèle à trois sphères. Comme sur tous les tests impliquant le modèle à trois sphères, la méthode symétrique est la plus précise. Plus le rapport des conductivités est grand, plus les erreurs de toutes les autres approches augmentent, et ce, avec un taux de croissance comparable. L’approche symétrique, au contraire, voit sa précision augmenter lorsque le rapport des conductivités augmente.

### 2.6.4 Discussion

Il convient tout d’abord de séparer les tests à une seule interface des tests à trois interfaces. Les premiers défavorisent la méthode symétrique car seul l’opérateur  $\mathcal{N}$  y est utilisé. La structure symétrique et la dualité entre potentiel et dérivée normale du potentiel n’entre alors pas en jeu, ce qui annihile la force de cette méthode. Pour les tests à plusieurs couches, la méthode symétrique se montre plus précise que la méthode simple couche. Cette dernière se montre, à son tour, plus précise que l’approche double couche classiquement utilisée jusqu’alors dans les formulations BEM du problème direct de la MEG/EEG. La méthode simple couche tire probablement sa supériorité sur la méthode double couche de son écriture faisant intervenir la somme d’un terme exact et d’un terme où interviennent les approximations. Cette comparaison que nous avons tentée d’établir est sujette à nombre de questionnements. Tout d’abord, à géométrie fixée et pour chaque type de discrétisation, le nombre de degrés de liberté diffère d’une méthode à l’autre. A titre d’exemple, pour un maillage sphérique de  $N$  sommets, une discrétisation de type P1 utilise  $N$  degrés de liberté, une discrétisation de type P0 en utilise environ  $2N$ . La méthode symétrique et sa discrétisation mixte P0/P1 en utilise, elle,  $3N$ . Dans ce dernier cas, le potentiel n’en utilise que  $N$ . Il est à noter que le choix de géométries sphériques, du type de maillage et de la norme utilisée dans la mesure d’erreur sont eux aussi des

facteurs déterminants lors de la comparaison.

## 2.7 Implémentation complète

Dans cette section nous détaillons certains points de notre implémentation du problème direct. Bien que la majorité des considérations suivantes soient applicables de manière immédiate ou presque aux approches simple et double couche, nous portons notre attention uniquement sur l'approche symétrique de la formulation par éléments frontières.

### 2.7.1 Termes source

Dans la section 2.5.3, nous avons utilisé des grandeurs  $(\underline{\mathbf{b}}_k)_i$  et  $(\underline{\mathbf{c}}_k)_i$  dont suivent, pour rappel, les définitions

$$(\underline{\mathbf{b}}_k)_i = \left\langle \partial_{\mathbf{n}} v_k - \partial_{\mathbf{n}} v_{k+1}, \phi_i^{(k)} \right\rangle, \quad (\underline{\mathbf{c}}_k)_i = \left\langle \sigma_{k+1}^{-1} v_{\Omega_{k+1}} - \sigma_k^{-1} v_{\Omega_k}, \psi_i^{(k)} \right\rangle.$$

Nous explicitons maintenant ces termes pour les deux modèles de source les plus communément utilisés en MEEG.

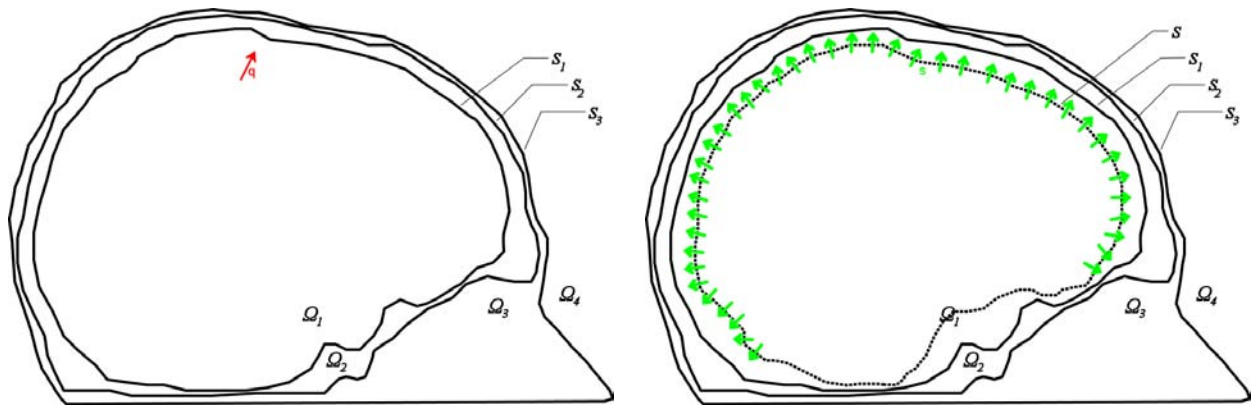


FIG. 2.7 – Modèle de tête à couches imbriquées avec source dipolaire ponctuelle (à gauche) et source dipolaire distribuée (à droite)

**Source dipolaire ponctuelle** La source est assimilée à un dipôle de courant. Il s'agit d'une source infinitésimale de courant orientée, localisée en  $\mathbf{r}_0$  et dont le moment dipolaire est  $\mathbf{q}$ . Elle est définie par  $\mathbf{J}_{\text{dip}}(\mathbf{r}) = \mathbf{q} \delta_{\mathbf{r}_0}(\mathbf{r})$ . Notons que le terme "dipôle de courant" provient de l'unité de  $\mathbf{q}$  : l' Ampère-mètre (A.m). Le potentiel électrique généré par une telle source dans un domaine homogène et sa dérivée normale se calculent de manière analytique.

$$v_{\text{dip}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \frac{\mathbf{q} \cdot (\mathbf{r}_0 - \mathbf{r})}{\|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}\|^3}$$

$$\partial_{\mathbf{n}} v_{\text{dip}}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{n}}{4\pi} \cdot \left( 3 \frac{\mathbf{q} \cdot (\mathbf{r}_0 - \mathbf{r})}{\|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}\|^5} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) - \frac{\mathbf{q}}{\|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}\|^3} \right)$$

Pour calculer les termes  $(\underline{\mathbf{b}}_k)_i$  et  $(\underline{\mathbf{c}}_k)_i$ , on procède à une intégration numérique par quadrature de Gauss adaptée aux triangles [17, 76].

**Source dipolaire distribuée** La source est modélisée par une distribution surfacique de courants dipolaires  $s$  portée par une surface  $S$ . Le moment de cette distribution est normal à  $S$  en tout point de celle-ci. Il s'agit d'une distribution de double couche (Annexe A). Le potentiel qu'elle crée dans un milieu homogène et sa dérivée sont donnés par

$$\begin{aligned} v(\mathbf{r}) &= \int_{\partial\Omega} \frac{1}{4\pi} \frac{\mathbf{n}' \cdot (-R)}{\|\mathbf{R}\|^3} s(\mathbf{r}') d\mathbf{s}(\mathbf{r}') = \int_{\partial\Omega} \partial_{\mathbf{n}'} G(R) s(\mathbf{r}') d\mathbf{s}(\mathbf{r}') = \mathcal{D}(s)(\mathbf{r}) \\ \partial_{\mathbf{n}} v(\mathbf{r}) &= \partial_{\mathbf{n}} \int_{\partial\Omega} \frac{1}{4\pi} \frac{\mathbf{n}' \cdot (-R)}{\|\mathbf{R}\|^3} s(\mathbf{r}') d\mathbf{s}(\mathbf{r}') = - \int_{\partial\Omega} \partial_{\mathbf{n}, \mathbf{n}'}^2 G(R) s(\mathbf{r}') d\mathbf{s}(\mathbf{r}') = -\mathcal{N}(s)(\mathbf{r}). \end{aligned}$$

La distribution  $s$  est discrétisée sur une base P1 et les calculs de  $(\mathbf{b}_k)_i$  et  $(\mathbf{c}_k)_i$  nécessitent respectivement de calculer le produit de  $\mathcal{N}s$  contre une fonction test P1 et le produit de  $\mathcal{D}s$  contre une fonction test P0. C'est précisément le mode de discrétisation qui a été adopté dans la section 2.4.4 et son implémentation ne nécessite aucune adaptation.

En supposant que  $S \subset \Omega_1$ , l'équation (2.25) s'écrit

$$\mathbf{A}\underline{\mathbf{x}} = \mathbf{B}\underline{\mathbf{s}} \quad (2.26)$$

avec

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -\mathbf{N}_{S1} \\ \mathbf{D}_{S1} \\ 0 \end{bmatrix}$$

où la notation par bloc est naturellement étendue à la surface  $S$ .

Le calcul de la matrice  $\mathbf{B}$  est très coûteux en raison de la présence d'un bloc  $\mathbf{N}$  de très grande taille. L'assemblage d'un tel bloc est particulièrement long car il nécessite d'accéder aux différents éléments du bloc  $S$  correspondant dans le théorème 6. Etant donné l'éparpillement en mémoire des ces données (en raison de la taille des matrices), l'efficacité du cache du processeur est fortement diminuée et la latence mémoire devient très limitante.

### 2.7.2 Calcul du potentiel électrique et des signaux EEG

La méthode symétrique fournit le potentiel électrique aux sommets des maillages de toutes les interfaces. Pour simuler le potentiel à une électrode donnée, on projette sa position sur la dernière interface (censée modéliser le scalp) et on interpole ensuite la valeur en ce point grâce aux fonctions P1.

Les positions des électrodes sont notées  $\mathbf{r}_{\text{EEG}}^i$  pour  $i$  variant de 1 à  $n_{\text{EEG}}$  (le nombre d'électrodes) alors que leurs projections sur  $S_N$  sont notées  $\mathbf{r}_{\text{EEG}}'^i$ . Pour calculer ces points, on a recours à l'algorithme rapide de Danielsson [29].

Dans la pratique, le problème direct en MEEG est surtout employé pour résoudre le problème inverse. Dans ces circonstances, on considère bien souvent un modèle de tête (des surfaces triangulées correspondant aux interface  $S_i$ ) ainsi que des positions de capteurs EEG et MEG fixes par rapport à ce modèle. Le passage des valeurs du potentiel électrique de l'interface la plus externe aux électrodes est donc une opération linéaire (par rapport aux valeurs du potentiel sur la dernière couche).

On note  $\underline{\mathbf{v}}$  le vecteur contenant les valeurs du potentiel sur chaque sommet de la triangulation de l'interface la plus externe. On note  $\underline{\mathbf{m}}_{\text{EEG}}$  le vecteur contenant les valeurs du potentiel électrique aux électrodes. De ce qui précède, on déduit qu'il existe une matrice que l'on nomme  $\mathbf{E}$  telle que  $\underline{\mathbf{m}}_{\text{EEG}} = \mathbf{E} \underline{\mathbf{v}}$ . Précisons que le vecteur  $\underline{\mathbf{v}}$  est de taille  $n_A$  (taille de la matrice  $\mathbf{A}$ ) et le vecteur  $\underline{\mathbf{m}}_{\text{EEG}}$  de taille  $n_{\text{EEG}}$ .

La matrice  $\mathbf{E}$  possède une structure creuse. En effet, chaque ligne ne reçoit que trois entrées non nulles. Pour l'électrode numéro  $i$  (la  $i^{\text{ème}}$  ligne de la matrice), on considère le triangle  $T_k$  de  $S_N$  auquel appartient  $\mathbf{r}_{\text{EEG}}^i$ . On note  $j_1, j_2, j_3$  les numéros de sommets formant ce triangle et  $a_1, a_2, a_3$  les points correspondant. On a

$$\begin{aligned} (\mathbf{E})_{ij_1} &= \frac{\det(\mathbf{r}_{\text{EEG}}^i, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)}{\det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)}, \\ (\mathbf{E})_{ij_2} &= \frac{\det(\mathbf{r}_{\text{EEG}}^i, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_1)}{\det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)}, \\ (\mathbf{E})_{ij_3} &= \frac{\det(\mathbf{r}_{\text{EEG}}^i, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)}{\det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)}. \end{aligned}$$

Tous les autres éléments de la ligne  $i$  de la matrice  $\mathbf{E}$  sont nuls.

Afin de simplifier les écritures, on procède à de triviales modifications sur la matrice  $\mathbf{E}$  de telle sorte que

$$\underline{\mathbf{m}}_{\text{EEG}} = \mathbf{E} \underline{\mathbf{x}} \quad (2.27)$$

### 2.7.3 Calcul du champ magnétique et des signaux MEG

Le calcul du champ magnétique généré par des sources, connaissant ces sources et le potentiel électrique qu'elles génèrent est immédiat grâce à la formule de Biot-Savart (1.3).

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\Omega} \mathbf{J}(\mathbf{r}') \times \nabla' \left( \frac{1}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} \right) d\mathbf{r}'$$

On utilise le fait que les ouverts  $\Omega_k$  forment une partition de l'espace :

$$B(\mathbf{r}) = B_0(\mathbf{J}^p)(\mathbf{r}) - \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{k=1}^N \sigma_k \int_{\Omega_k} \nabla' V \times \nabla' \left( \frac{1}{R} \right) d\mathbf{r}'$$

avec

$$B_0(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\Omega} \mathbf{J}^p \times \nabla' \left( \frac{1}{R} \right) d\mathbf{r}' \quad (2.28)$$

et on omet le terme concernant  $\Omega_{N+1}$  puisque ce dernier est non conducteur et vide de toute charge.

On utilise ensuite l'identité  $\nabla \times (V \nabla (\frac{1}{R})) = \nabla V \times \nabla (\frac{1}{R})$  et la formule de Stokes  $\int_{\Omega} \nabla \times \mathbf{u} d\mathbf{r} = \int_{\partial\Omega} \mathbf{n} \times \mathbf{u} ds$  dans l'équation précédente.

$$B(\mathbf{r}) = B_0(\mathbf{r}) + \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{k=1}^N \sigma_k \int_{\partial\Omega_k} V(\mathbf{r}') \nabla' \left( \frac{1}{R} \right) \times \mathbf{n}_k(\mathbf{r}') ds'$$

On utilise enfin la relation  $\partial\Omega_k = S_k \cup S_{k-1}$  en tenant compte de l'orientation des normales et on obtient

$$B(\mathbf{r}) = B_0(\mathbf{J}^p)(\mathbf{r}) + B_1(V)(\mathbf{r})$$

avec

$$B_1(V)(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{k=1}^N (\sigma_k - \sigma_{k+1}) \int_{S_k} V(\mathbf{r}') \nabla' \left( \frac{1}{R} \right) \times \mathbf{n}_k(\mathbf{r}') ds'.$$

Le calcul de cette formule pour  $V$  discrétisé sur une base de fonctions P1 avec une source distribuée, discrétisée elle aussi sur une base de fonctions P1, nécessite le calcul exact d'intégrales spécifiques sur des triangles. Nous avons suivi les travaux de Ferguson et al. [39] pour ce point. Nous renvoyons le lecteur intéressé à cette référence pour plus de détails.

Etant données les positions  $\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_{n_{meg}}$  et les orientations  $\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_{n_{meg}}$  des  $n_{meg}$  capteurs, on dispose après cette discrétisation de matrices  $C$  et  $D$  vérifiant

$$\begin{bmatrix} B_0(\mathbf{J}^p)(\mathbf{p}_1) \cdot \mathbf{q}_1 \\ \vdots \\ B_0(\mathbf{J}^p)(\mathbf{p}_{n_{meg}}) \cdot \mathbf{q}_{n_{meg}} \end{bmatrix} = C \mathbf{s} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} B_1(\mathbf{J}^p)(\mathbf{p}_1) \cdot \mathbf{q}_1 \\ \vdots \\ B_1(\mathbf{J}^p)(\mathbf{p}_{n_{meg}}) \cdot \mathbf{q}_{n_{meg}} \end{bmatrix} = D \mathbf{x}$$

de telle sorte qu'on a

$$\underline{\mathbf{m}}_{\text{MEG}} = \begin{bmatrix} B(\mathbf{J}^p)(\mathbf{p}_1) \cdot \mathbf{q}_1 \\ \vdots \\ B(\mathbf{J}^p)(\mathbf{p}_{n_{meg}}) \cdot \mathbf{q}_{n_{meg}} \end{bmatrix} = C \mathbf{s} + D \mathbf{x} \quad (2.29)$$

### 2.7.4 Matrices de gain

Muni des précédentes matrices, on peut calculer les matrices de gain liant la représentation P1 de la distribution de sources sur  $S$  aux mesures MEG et EEG.

$$\underline{\mathbf{m}}_{meg} = H_{meg} \underline{\mathbf{s}} \quad \text{et} \quad \underline{\mathbf{m}}_{eeg} = H_{eeg} \underline{\mathbf{s}}$$

avec

$$H_{meg} = C + D A^{-1} B \quad \text{et} \quad H_{eeg} = E A^{-1} B. \quad (2.30)$$

### 2.7.5 Discussion

La résolution du problème direct MEEG sur géométrie réaliste à l'aide de la BEM symétrique, avec une source distribuée sur une surface  $S$  située à l'intérieur de  $\Omega_1$ , nécessite l'assemblage de 5 matrices.

Nous détaillons le coût de l'assemblage de chacune d'entre elles et donnons, à titre indicatif, leur temps d'assemblage<sup>3</sup> pour un modèle de tête composé de trois interfaces de 700 sommets chacune ( $n_A \approx 4900$ ) et d'une surface portant les sources de 35000 sommets ( $n_S = 35000$ ) avec  $n_{meg} = 181$  et  $n_{eeg} = 64$ .

- la matrice  $A$  est d'un coût d'assemblage proportionnel à  $n_A^2$ , pour notre modèle de tête son assemblage prend environ 1 minute. L'inversion de cette matrice prend environ 3 minutes.
- la matrice  $B$  est d'un coût d'assemblage proportionnel à  $n_A \times n_S$ , pour notre modèle de tête son assemblage prend environ 10 heures.
- la matrice  $C$  est d'un coût d'assemblage proportionnel à  $n_{meg} \times n_S$ , pour notre modèle de tête son assemblage prend environ 3 heures.

---

<sup>3</sup>processeur AMD opteron 1.8 GHz sous linux FC4 64 bit



- la matrice  $D$  est d'un coût d'assemblage proportionnel à  $n_{meg} \times n_A$ , pour notre modèle de tête son assemblage prend environ 5 secondes.
- la matrice  $E$  est d'un coût d'assemblage proportionnel à  $n_{eeg} \times n_A$ , pour notre modèle de tête son assemblage est instantané ( $<1$  sec)

Les multiplications matricielles pour former  $H_{meg}$  et  $H_{eeg}$  sont très rapides et prennent respectivement 20 et 6 secondes.

Les chiffres exposés montrent que les temps de calcul restent raisonnables pour un modèle de tête à trois couches de 2000 triangles chacune. Une simple extrapolation des résultats de la table 2.2 montre que pour le même modèle, dont chaque couche serait composée de 20000 triangles, le temps d'assemblage serait d'une semaine. La matrice générée serait d'une taille d'environ 20 Go. Une méthode directe prendrait alors une semaine pour inverser la matrice.

Pour surmonter ce problème, deux méthodes sont possibles.

La première réside dans la parallélisation de chacun des éléments de la chaîne de calcul sur un cluster d'ordinateurs. Ce portage ne poserait aucune difficulté pour l'assemblage de la matrice. De nombreux algorithmes distribués de décomposition de matrice existent ainsi que des implémentations très efficaces sur ce type de plate-forme[89, 61, 4]. Il est donc possible, par une parallélisation, de diviser le temps de calcul par le nombre d'ordinateurs contenus dans un cluster. Ce choix n'influe en revanche nullement sur la complexité asymptotique des algorithmes mis en jeu, ou, sur l'occupation mémoire de la matrice. Une fois calculée, celle-ci ne tient pas dans la mémoire vive d'une station de travail. La solution consiste, alors, à calculer et à utiliser la matrice de gain  $H$  d'une taille beaucoup plus modeste.

Inversement, il existe une technique qui permet d'éviter l'assemblage complet de la matrice mais qui permet de calculer le produit d'un vecteur par cette matrice avec une complexité de  $n \log n$ . Il s'agit de la méthode multipôle rapide (FMM) qui a déjà été appliquée avec succès au problème direct de la MEEG[69]. La parallélisation de cette technique est également possible. Cette méthode permet d'atteindre des tailles de maillage inaccessibles à l'alternative précédente.

Dans le cadre du problème inverse (EEG par exemple), notamment pour des sources distribuées, les algorithmes ont souvent recours à la matrice de gain  $H_{eeg}$  dont la taille est beaucoup plus modeste et indépendante des maillages des interfaces. La quantité d'intérêt devient alors le nombre d'opérations nécessaires à une multiplication de  $H_{eeg}$  par un vecteur.

Dans le cas de l'assemblage et de l'inversion directe, il y a un coût fixe de l'ordre de  $n_A^3$  opérations et un coût par produit de  $n_S \times n_{eeg}$  opérations.

Pour la FMM, il n'y a aucun coût fixe et le coût par produit est de  $n_A \times n_S + n_{iter} K n \log n + n_{eeg} \times n_A$ ,  $n_{iter}$  étant le nombre d'itérations nécessaires à la résolution itérative du système 2.25.

Or, [69] montre que  $K$  est grand et la table 2.2 montre que  $n_{iter}$  est également important. S'ajoute à cela que le rendement des processeurs est bien meilleur pour des calculs matriciels comme la décomposition nécessaire à l'inversion de la matrice  $A$ .

L'approche FMM dans le problème direct ne peut donc être rentable, pour le problème inverse, que pour des tailles de maillages extrêmement élevées. Se pose alors la question de la génération de tels maillages, de leur impact sur la précision du problème direct et finalement de leur influence sur la précision des localisations effectuées en problème inverse.

Nous ne remettons pas en question la méthode FMM qui est une avancée indéniable, nous émettons juste une mise en garde contre une éventuelle utilisation abusive.

---

## Chapitre 3

# Application à l'estimation de conductivité

Dans ce chapitre, nous présentons une application de la formulation symétrique de la BEM que nous avons menée sur le problème de la tomographie par impédance électrique. Ces travaux ont été publiés à la conférence NFSI 2005 [23] et dans [24].

### 3.1 Introduction

De nombreuses études ont démontré la grande sensibilité du problème inverse MEEG à la valeur des conductivités électriques [84, 5, 35, 58, 72, 108], la valeur de la conductivité de la couche osseuse se montrant particulièrement critique dans le cas de l'EEG.

Par ailleurs, les premières études portant sur la conductivité des tissus furent menées *in vitro* [42] sur des prélèvements effectués sur des animaux.

Ce type d'étude présente deux inconvénients majeurs. Premièrement, la conductivité des tissus morts diffère de celle des tissus vivants<sup>1</sup>. Deuxièmement, il existe probablement des différences notables entre les comportements des tissus chez l'homme et chez l'animal puisque des études postérieures ont démontré une grande variabilité inter-sujet, ne serait-ce que chez l'homme. L'anisotropie de certains tissus tels que les fibres nerveuses peut, de plus, être vue comme une forme de variabilité intra-sujet. Si l'on ajoute à cela, le fait que la conductivité électrique des cellules nerveuses change durant leur activité, on obtient une explication partielle à la grande variabilité des conductivités mesurées ou estimées pour les tissus rencontrés dans la tête[36].

Parallèlement à cela, l'évolution conjointe des moyens matériels consacrés aux études MEEG (tant du point de vue de leurs performances que de leur implantation) et des algorithmes de problème direct et inverse en MEEG rend possible l'utilisation de modèles de tête réalistes spécifiques à chaque sujet. Ces modèles réalistes, obtenus à partir de la segmentation d'une IRM anatomique du sujet, sont pour la plupart constitués de différents volumes de conductivité isotrope constante. Ces modèles dits réalistes ne constituent donc qu'une approximation simplificatrice et les valeurs de conductivité que l'on souhaite attribuer à chaque compartiment ne sont pas forcément les plus proches possibles des valeurs réelles mais plutôt celles fournissant la meilleure adéquation entre les simulations menées sur ce modèle simplifié et la réalité. On parle alors de *conductivité effective* ou de *conductivité équivalente*.

---

<sup>1</sup>à cause de processus de dégradation chimique

Nombre d'études ont été menées *in vivo* pour essayer d'estimer les conductivités des milieux présents dans la tête[92, 112, 59, 37]. Parmi les techniques non invasives, si l'on écarte les techniques prometteuses basées sur l'IRM de diffusion[113] malheureusement aveugles au crâne, deux se démarquent.

La technique dite des *Somatosensory Evoked Fields*(SEF) [47, 13] provoque l'activation d'une source très focale dans le cerveau grâce à la stimulation électrique d'un nerf. La localisation et l'amplitude de cette source sont évaluées grâce au problème inverse en MEG(peu sensible aux conductivités). Connaissant ensuite la source et le modèle de tête, on ajuste par un algorithme de gradient les valeurs des conductivités recherchées afin de minimiser l'écart entre le problème direct EEG (plus sensible aux conductivités) et les mesures EEG effectuées durant la même expérience.

La technique dite d'*Electric Impedance Tomography*(EIT) repose sur la même idée sauf que la source de courant est extérieure. Il n'est donc pas nécessaire d'avoir recours à la première phase avec la MEG puisque l'on peut contrôler le lieu et l'intensité de l'injection de courant. L'EIT peut en outre être pratiquée de deux manières différentes. Soit on induit un courant à l'intérieur de la tête grâce à un champ magnétique variable, on parle alors d'*induced EIT*[43]. Soit on injecte un courant à la surface du scalp, on parle alors de *injected current EIT*[92].

La dernière technique peut être mise en oeuvre dans un contexte clinique assez facilement dans la mesure où elle ne nécessite ni MEG ni équipement particulier pour l'induction de courant, ce qui n'est pas le cas des deux précédentes techniques.

C'est dans ce cadre que nous avons suivi les grandes lignes de [48] pour le développement d'une formulation symétrique de la BEM pour l'EIT.

## 3.2 Tomographie par impédance électrique avec la méthode symétrique

Nous utilisons la formulation symétrique de la BEM que nous avons exposée dans le chapitre 2 pour développer des algorithmes d'EIT. Dans cette formulation, les inconnues sont le potentiel électrique en chaque sommet et sa dérivée normale sur chaque triangle. Comme nous le montrons dans cette section, il est facile, à partir de la seconde grandeur, de modéliser les courants d'injection de l'EIT. Une approche symétrique par BEM de l'EIT présente également l'avantage de ne nécessiter aucun assemblage de matrice supplémentaire, la matrice du problème direct étant suffisante. Nous développons deux algorithmes basés sur une descente de gradient minimisant une erreur de simulation. L'un est destiné aux expériences où la quantité de courant injectée est connue, l'autre aux expériences où elle est inconnue.

Dans toute cette section, on conserve les mêmes notations que dans le chapitre 2. Là encore, la totalité de ce qui suit se généralise de manière immédiate à des topologies plus complexes que celle de notre modèle de tête à couches imbriquées.

### 3.2.1 Adaptation de la BEM symétrique au problème direct de l'EIT

Nous nous intéressons, dans ce qui suit, au problème direct de l'EIT. Étant données une géométrie (donnée par les surfaces  $S_j$ ), des conductivités associées aux différents milieux délimités par ces surfaces, la valeur et l'emplacement des courants d'injection, on

souhaite simuler la valeur du potentiel électrique sur toutes les électrodes. Pour reformuler la BEM symétrique dans le cas de l'EIT, il faut supprimer les termes source et modifier les conditions aux interfaces pour tenir compte de l'injection (et l'extraction) de courant. Pour ce faire, on repart du théorème de représentation 1 du chapitre 2.

Pour les interfaces  $S_1, S_2, \dots, S_{N-1}$ , il n'y a ni terme source, ni injection de courant et les équations (2.17) et (2.18) donnent respectivement

$$\begin{aligned} \sigma_i \mathcal{N}_{i,i-1} V_{S_{i-1}} - (\sigma_i + \sigma_{i+1}) \mathcal{N}_{ii} V_{S_i} + \sigma_{i+1} \mathcal{N}_{i,i+1} V_{S_{i+1}} \\ - \mathcal{D}_{i,i-1}^* p_{S_{i-1}} + 2\mathcal{D}_{ii}^* p_{S_i} - \mathcal{D}_{i,i+1}^* p_{S_{i+1}} = 0 \quad \text{pour } i = 1, \dots, N-1 \end{aligned} \quad (3.1)$$

et

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{i,i-1} V_{S_{i-1}} - 2\mathcal{D}_{ii} V_{S_i} + \mathcal{D}_{i,i+1} V_{S_{i+1}} \\ - \sigma_i^{-1} \mathcal{S}_{i,i-1} p_{S_{i-1}} + (\sigma_i^{-1} + \sigma_{i+1}^{-1}) \mathcal{S}_{ii} p_{S_i} - \sigma_{i+1}^{-1} \mathcal{S}_{i,i+1} p_{S_{i+1}} = 0 \quad \text{pour } i = 1, \dots, N-1. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Une attention particulière doit être accordée au dernier milieu  $\Omega_N$ . La conductivité de l'air étant nulle, la seconde équation n'a plus de sens et ne doit plus être considérée. On utilise le théorème 1 pour exprimer la limite interne de la dérivée normale du potentiel dans  $\Omega_N$ . La limite externe étant nulle, on a

$$-p_{S_N} = -\frac{p_{S_N}}{2} + \sigma_N \mathcal{N}_{N,N-1} V_{S_{N-1}} - \mathcal{D}_{N,N-1}^* p_{S_{N-1}} - \sigma_N \mathcal{N}_{NN} V_{S_i} + \mathcal{D}_{N,N}^* p_{S_N}. \quad (3.3)$$

En substituant la valeur du courant d'injection  $j$  à  $p_{S_N}$  et en isolant les termes faisant apparaître cette grandeur dans le membre de droite, les équations (3.2), (3.1) et (3.3) forment un système d'équations intégrales similaire à celui de l'approche symétrique du problème direct en EEG, exception faite du membre de droite. On décompose  $j$  sur une base de fonctions P0 sur  $S_N$  :  $j = \sum_k j_k \psi_k$  et la forme discrétisée du système s'écrit

$$\mathbf{A}_\sigma (V p)^T = \mathbf{f}_\sigma(\mathbf{j}) \quad (3.4)$$

où  $\mathbf{A}_\sigma$  est la matrice symétrique du problème direct de l'EEG (la matrice  $A$  de (2.25)),  $(V p)^T$  est le vecteur d'inconnues du même problème direct (système 2.25) et  $\mathbf{f}_\sigma(\mathbf{j})$  le terme source donné par

$$\mathbf{f}_\sigma(\mathbf{j}) = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & -\mathcal{D}_{N-1,N}^* \mathbf{j} & -\sigma_N^{-1} \mathcal{S}_{N-1,N} \mathbf{j} & -\mathcal{D}_{N,N}^* \mathbf{j} + \frac{\mathbf{j}}{2} \end{pmatrix}^T = \mathbf{F}_\sigma \mathbf{j}$$

où  $\mathbf{F}_\sigma$  est la matrice correspondante.

La manière de discrétiser le courant d'injection  $j$  utilisée ici paraît beaucoup plus naturelle que les monopôles dans le scalp utilisés dans [92].

### 3.2.2 Validation

Nous établissons d'abord une relation classique connue sous le nom de principe de réciprocité :

**Théorème 2 (Principe de Réciprocité)** Soit  $\Omega$  un ouvert de frontière  $\partial\Omega$ . Soit  $V_{EEG}$  le potentiel électrique généré par le courant source  $\mathbf{J}_p$  dans le problème direct de l'EEG.

Soit  $V_{EIT}$  le potentiel électrique généré par le courant d'injection  $j$  dans le problème direct de l'EIT. On a la relation suivante :

$$\int_{\Omega} \mathbf{J}_p \cdot \nabla V_{EIT} = \int_{\partial\Omega} j V_{EEG} \quad (3.5)$$

Ce théorème est une conséquence de l'identité de Green  $\int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{a} = \int_{\partial\Omega} \mathbf{a} \cdot \mathbf{n}$ . On applique cette identité une première fois au champ de vecteurs  $\mathbf{a} = \sigma V_{EIT} \nabla V_{EEG}$ ,

$$\int_{\Omega} (\nabla \cdot \sigma \nabla V_{EEG}) V_{EIT} + \int_{\Omega} \sigma \nabla V_{EEG} \cdot \nabla V_{EIT} = \int_{\partial\Omega} \sigma V_{EIT} \partial_{\mathbf{n}} V_{EEG}$$

puis une seconde fois au champ de vecteurs  $\mathbf{a} = \sigma V_{EEG} \nabla V_{EIT}$  :

$$\int_{\Omega} (\nabla \cdot \sigma \nabla V_{EIT}) V_{EEG} + \int_{\Omega} \sigma \nabla V_{EIT} \cdot \nabla V_{EEG} = \int_{\partial\Omega} \sigma V_{EEG} \partial_{\mathbf{n}} V_{EIT}.$$

On applique la formule (1.5) pour  $V_{EIT}$  et  $V_{EEG}$  à la différence des deux précédentes relations et on obtient le résultat désiré.

Ce théorème montre que le champ électrique de l'EIT  $\nabla V_{EIT}$  peut être vu comme un *lead field* pour le problème direct de l'EEG. En utilisant pour l'EIT un courant d'injection de la forme  $j = \delta_{r_1} - \delta_{r_2}$  dans la relation (3.5), on obtient l'identité

$$\int_{\Omega} \mathbf{J}_p(r) \cdot \nabla V_{EIT} = V_{EEG}(r_1) - V_{EEG}(r_2). \quad (3.6)$$

Dans le cas d'une source d'EEG dipolaire  $\mathbf{J}_p(r) = \mathbf{q} \delta_{r_0}$ , la relation (3.6) permet de valider le problème direct de l'EIT, soit avec des formules analytiques dans le cas d'une géométrie sphérique, soit avec un problème direct EEG pour des géométries réalistes.

### 3.2.3 Problème inverse en EIT

On effectue une série d'expériences EIT sur un même sujet : pour chaque expérience  $m$ , on dispose des numéros des électrodes d'injection et d'extraction  $i_m$  et  $e_m$  et du potentiel électrique sur chacune des autres électrodes. On note  $r_k$  la position de l'électrode numéro  $k$ . A la différence du "Complete Electrode Model" utilisé dans [60], aucune mesure n'est effectuée au niveau des électrodes d'injection et d'extraction. Dans cette section, nous exposons deux algorithmes d'estimation des conductivités adaptés à deux types de conditions expérimentales distinctes.

#### Cas d'un courant d'injection connu

On note  $\lambda_m$  l'intensité du courant d'injection de telle sorte que

$$j_m(r) = \lambda_m u_m(r) = \lambda_m [\delta_{r_{i_m}}(r) - \delta_{r_{e_m}}(r)].$$

Etant donnée une distribution de conductivité  $\sigma$ , on note  $V(\sigma, j_m)$  la solution du problème direct d'EIT correspondant. On cherche à retrouver la distribution de conductivités  $\sigma$  minimisant l'erreur de simulation

$$E(\sigma) = \sum_{m=1}^M \|V(\sigma, j_m) - v_m\|_{\text{meas}(m)}^2. \quad (3.7)$$

où  $v_m$  désigne le vecteur contenant les mesures effectuées à l'expérience  $m$ .

On note  $\|\cdot\|_{\text{meas}(m)}^2$  la norme  $L^2$  discrète prise sur les électrodes de mesures<sup>2</sup> de la mesure  $m$ .

$$\|V - v_m\|_{\text{meas}(m)}^2 = \sum_{k \notin \{i_m, e_m\}} |V(r_k) - v_m(r_k)|^2$$

Cette erreur de simulation est minimisée par un algorithme de descente de gradient.

---

**Algorithme 1** Descente de gradient itérative pour  $\sigma$ , dans le cas d'un courant d'injection connu

---

Initialise  $\sigma$

**répéter**

**pour** chaque expérience  $m = 1, \dots, M$  **faire**

    calculer  $V(\sigma, j_m)$  solution de (3.4)

**pour**  $n = 1, \dots, N$  **faire**

      calculer  $\partial_{\sigma_n} V$  solution de (3.9)

**fin pour**

**fin pour**

  calculer  $\nabla_{\sigma} E$  à l'aide de (3.8)

  effectuer une recherche linéaire pour trouver  $\alpha$  minimisant  $E(\sigma - \alpha \nabla_{\sigma} E)$

$\sigma \leftarrow \sigma - \alpha \nabla_{\sigma} E$

**jusqu'à**  $\|\nabla E(\sigma)\| < \text{seuil}$

---

Le calcul du gradient de l'erreur de simulation (3.7) est immédiat et donne

$$\nabla_{\sigma} E(\sigma) = 2 \sum_{m=1}^M \langle V(\sigma, j_m) - v_m, \nabla_{\sigma} V(\sigma, j_m) \rangle_{\text{meas}(m)} \quad (3.8)$$

où  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\text{meas}(m)}$  est le produit scalaire associé à la norme  $\|\cdot\|_{\text{meas}(m)}$

$$\langle V_1, V_2 \rangle_{\text{meas}(m)} = \sum_{k \notin \{i_m, e_m\}} V_1(r_k) V_2(r_k)$$

Dans notre modèle à conductivité constante par domaine  $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_N)$  et le terme  $\nabla_{\sigma} V$  est le vecteur des  $N$  dérivées partielles  $(\partial_{\sigma_1} V, \dots, \partial_{\sigma_N} V)$ , chacune étant la solution d'un système linéaire :

$$\mathbf{A}_{\sigma}(\partial_{\sigma_i} V \partial_{\sigma_i} p)^T = -(\partial_{\sigma_i} \mathbf{A}_{\sigma}) (V p) + \partial_{\sigma_i} \mathbf{f}_{\sigma}(j_m) \quad (3.9)$$

Le calcul de  $\partial_{\sigma_i} \mathbf{A}_{\sigma}$  est très simple. Il suffit de remplacer dans  $\mathbf{A}_{\sigma}$  les blocs où n'apparaît pas  $\sigma_i$  par des blocs nuls et de remplacer  $\sigma_i$  par 1 et les  $\sigma_i^{-1}$  par  $-\sigma_i^{-2}$ .

### Cas d'un courant d'injection inconnu

Pour des raisons pratiques et techniques, mesurer précisément le courant d'injection n'est pas toujours aisé ou possible. C'est la raison pour laquelle nous introduisons un second algorithme pour lequel l'intensité du courant d'injection est supposé inconnu. On adapte l'erreur à minimiser en conséquence et cette dernière devient

$$E(\sigma) = \min_{\{\lambda_m\}} \sum_{m=1}^M \|V(\sigma, \lambda_m u_m) - v_m\|_{\text{meas}(m)}^2.$$

---

<sup>2</sup>c'est-à-dire en excluant les électrodes d'injection et d'extraction

La linéarité de  $V$  par rapport à l'intensité des sources rend possible et aisé le calcul des  $\lambda_m$  optimaux :

$$\hat{\lambda}_m = \frac{\langle V(\sigma, u_m), v_m \rangle_{\text{meas(m)}}}{\langle V(\sigma, u_m), V(\sigma, u_m) \rangle_{\text{meas(m)}}}. \quad (3.10)$$

L'erreur se réécrit

$$E(\sigma) = \sum_{m=1}^M \|\hat{\lambda}_m V(\sigma, u_m) - v_m\|_{\text{meas(m)}}^2.$$

En réinjectant ces modifications dans (3.8), on a

$$\nabla_\sigma E(\sigma) = 2 \sum_{m=1}^M \langle \hat{\lambda}_m V(\sigma, u_m) - v_m, \nabla_\sigma (\hat{\lambda}_m V(\sigma, u_m)) \rangle_{\text{meas(m)}}. \quad (3.11)$$

L'utilisation de l'algorithme 1 reste valide si l'on remplace  $\lambda_m$  par  $\hat{\lambda}_m$  dans  $E(\sigma)$  et  $\nabla E(\sigma)$  en utilisant (3.10). Il est alors nécessaire de fixer l'une des conductivités de manière arbitraire, nous choisissons celle du scalp  $\sigma_N$ .

Cette nécessité provient de deux relations de linéarité intervenant dans l'équation (1.5).

- La solution du problème direct de l'EIT est inversement proportionnelle au vecteur des conductivités  $\sigma$ . Plus précisément, si l'on multiplie toutes les conductivités par un scalaire, la solution du système (3.4) est modifiée de telle sorte que le potentiel solution est multiplié par l'inverse de ce scalaire alors que sa dérivée normale n'est pas affectée.
- Le principe de superposition des solutions se traduit dans l'équation (1.5) par une linéarité de la solution par rapport à l'intensité de la source  $\mathbf{J}_p$ .

Cela se traduit par les relations

$$V(\sigma, \alpha u_m) = \alpha V(\sigma, u_m) \quad \text{et} \quad V(\alpha \sigma, u_m) = \frac{1}{\alpha} V(\sigma, u_m) \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}^*.$$

Il existe donc une relation d'indétermination entre  $\sigma$  et  $\lambda_m$  du type  $V(\sigma, \lambda_m u_m) = V(\alpha \sigma, \alpha \lambda_m u_m)$  pour tout  $\alpha \neq 0$ . Fixer l'une des composantes du vecteur  $\sigma$  revient à lever cette indétermination.

### 3.2.4 Expérimentations numériques

#### Dispositif expérimental

Les mesures de potentiel ont été réalisées à l'aide d'un casque EEG à 32 voies et 20 couples d'électrodes d'injection/extraction ont été choisis. Le courant d'injection a été appliqué successivement à ces couples d'électrodes. Pour ce courant, nous avons choisi d'utiliser un signal en créneau d'une fréquence de 110 Hz et d'une intensité de 0.1 mA. La fréquence d'échantillonnage du dispositif EEG était de 10 kHz et les potentiels ont été moyennés sur plus de 1000 répétitions sans artefact. Pour chaque paire d'électrodes d'injection, on a défini le potentiel d'EIT mesuré  $v_m$  comme la valeur maximale du potentiel moyenné, ce maximum se produisant au même instant sur toutes les électrodes de mesure. Le courant d'injection n'ayant pu être mesuré précisément, nous avons utilisé la technique d'estimation des conductivités exposée dans 3.2.3. Il n'a donc pas été possible pour cette partie expérimentale d'estimer la valeur intrinsèque des conductivités de tous les milieux mais seulement leur rapport avec la conductivité du scalp.



## Modèle de tête et assemblage des matrices

Les maillages des interfaces ont été obtenus grâce à la segmentation d'une IRM anatomique du patient traitée avec le logiciel ASA<sup>3</sup>. Les maillages obtenus étaient d'une qualité suffisante pour les calculs de BEM et n'ont nécessité aucun post-traitement. Les maillages des interfaces cerveau-crâne, crâne-scalp et scalp-air présentaient respectivement 510, 510 et 1222 sommets. Pour des conductivités données, la matrice du système EIT et la matrice du terme source ont été assemblées en respectivement 8 et 5 minutes<sup>4</sup>. La mise à jour de ces matrices pour d'autres valeurs de conductivité est immédiate puisqu'il s'agit de simples multiplications de blocs par des scalaires.

## Estimation des conductivités

Les deux variantes de l'algorithme proposé ont été implémentées en MATLAB.

TAB. 3.1 – Données synthétiques, pour  $\sigma_{\text{cerveau}} = 1.2$ ,  $\sigma_{\text{crâne}} = 0.0308$ ,  $\sigma_{\text{scalp}} = 1$ .

conductivités fixées	initialisation	conductivités estimées	temps de calcul
$\sigma_{\text{scalp}} = 1$	$\sigma_{\text{crâne}} = 0.1$ $\sigma_{\text{cerveau}} = 1.12$	$\sigma_{\text{crâne}} = 0.0317$ $\sigma_{\text{cerveau}} = 1.12$	648 s
$\sigma_{\text{scalp}} = 1$ $\sigma_{\text{cerveau}} = 1.2$	$\sigma_{\text{crâne}} = 0.1$	$\sigma_{\text{crâne}} = 0.0309$	543 s
$\sigma_{\text{scalp}} = 1$ $\sigma_{\text{cerveau}} = 1.8$	$\sigma_{\text{crâne}} = 0.1$	$\sigma_{\text{crâne}} = 0.0259$	669 s

Une première série de tests a été menée sur des données synthétiques. Ces dernières ont été simulées à l'aide du problème direct de l'EIT calculé sur le modèle à trois couches décrit ci-dessus pour des valeurs de conductivités  $\sigma_{\text{cerveau}} = 1.2$ ,  $\sigma_{\text{crâne}} = 0.0308$  et  $\sigma_{\text{scalp}} = 1$ . Les résultats de ces tests sont présentés dans la Table 3.1. Nous avons remarqué qu'en pratique la méthode d'estimation n'était pas suffisamment sensible à la valeur de la conductivité du cerveau : la dérivée partielle  $\partial_{\sigma_{\text{cerveau}}} E(\sigma)$  est beaucoup plus faible que la dérivée partielle  $\partial_{\sigma_{\text{crâne}}} E(\sigma)$ , si bien que durant une optimisation simultanée sur ces deux conductivités, celle du cerveau ne change que très peu. Pour quantifier ce phénomène, nous avons minimisé le coût par rapport à  $\sigma_{\text{crâne}}$  (donc à  $\sigma_{\text{scalp}}$  et  $\sigma_{\text{cerveau}}$  fixés) et nous avons calculé la variabilité de la conductivité du crâne optimale par rapport à la conductivité fixée pour le cerveau. A titre d'exemple, un changement de l'ordre de 50% de la valeur de  $\sigma_{\text{cerveau}}$  peut n'occasionner une variation de la valeur de  $\sigma_{\text{crâne}}$  que de 16% environ.

Les résultats de l'expérience sur les données réelles sont présentés dans la Table 3.2. Pour cette expérience, l'optimisation a été réalisée uniquement sur la valeur de  $\sigma_{\text{crâne}}$  ( $\sigma_{\text{cerveau}}$  et  $\sigma_{\text{scalp}}$  fixés). Le rapport  $\frac{\sigma_{\text{scalp}}}{\sigma_{\text{crâne}}}$  obtenu est de l'ordre de 25, ce qui est cohérent avec les résultats précédemment obtenus dans la littérature pour ce type d'estimation [47, 13, 53, 92, 48].

La fonction de coût normalisée  $E(\sigma) / \sum_{m=1, \dots, M} \|v_m\|_{\text{meas}(m)}^2$  mesure l'adéquation entre les mesures et le modèle. La Figure 3.1 montre le graphe de cette fonction pour les données réelles :

<sup>3</sup>Advanced Source Analysis, ANT

<sup>4</sup>PC de type Pentium 4 à 3 Ghz disposant de 2 GB de mémoire RAM sous Linux

TAB. 3.2 – Données réelles

conductivités fixées	initialisation	conductivités estimées	temps de calcul
$\sigma_{\text{scalp}} = 1$ $\sigma_{\text{cerveau}} = 1$	$\sigma_{\text{crâne}} = 0.02$	$\sigma_{\text{crâne}} = 0.0408$	485 s
$\sigma_{\text{scalp}} = 1$ $\sigma_{\text{cerveau}} = 1$	$\sigma_{\text{crâne}} = 0.1$	$\sigma_{\text{crâne}} = 0.0407$	597 s
$\sigma_{\text{scalp}} = 1$ $\sigma_{\text{cerveau}} = 1.2$	$\sigma_{\text{crâne}} = 0.1$	$\sigma_{\text{crâne}} = 0.0394$	594 s

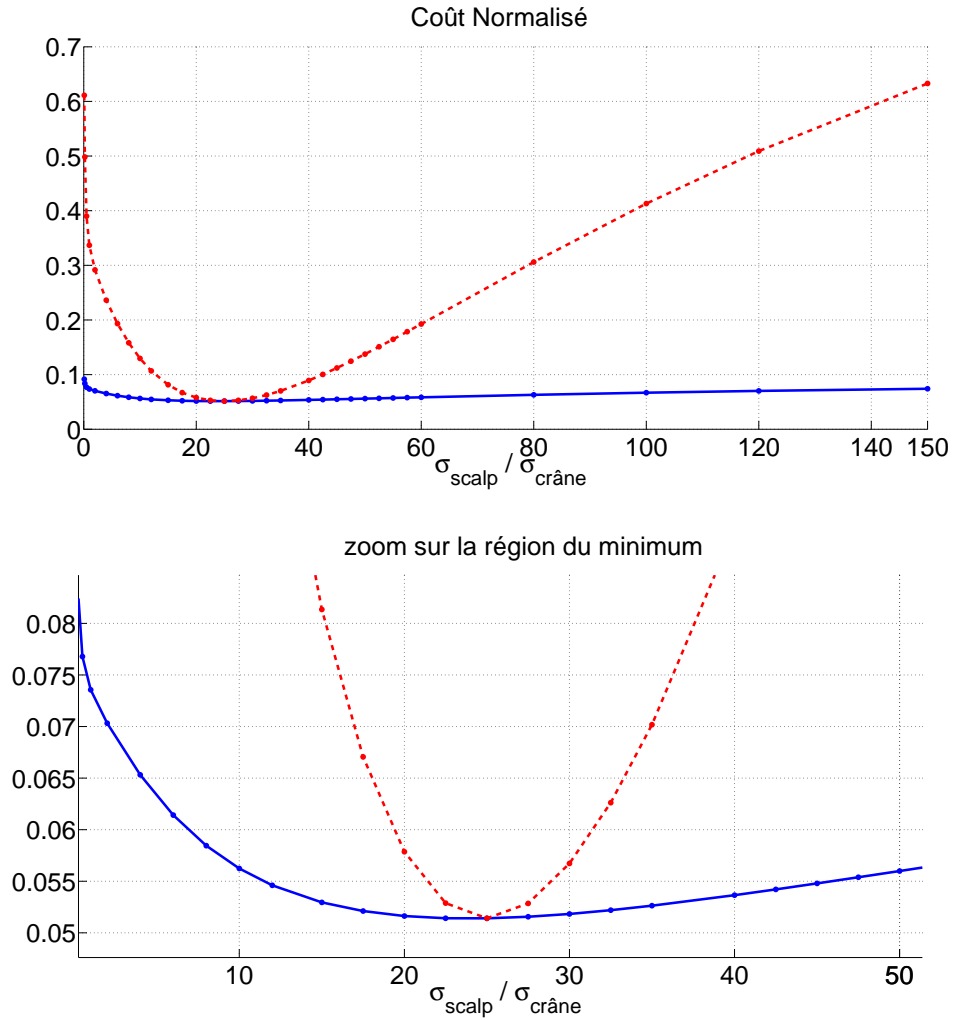


FIG. 3.1 – Coût normalisé pour le jeu de données réelles (en haut). Zoom sur la région du minimum (en bas). En ligne pleine : courant d'injection estimé. En pointillés : courant d'injection connu.

- La courbe pleine en bleu représente le cas du courant d'injection estimé
- La courbe en pointillés en rouge représente le cas du courant d'injection connu (fixé à  $\hat{\lambda}_m(\sigma_{\text{opt}})$  où  $\sigma_{\text{opt}}$  est la valeur de la conductivité optimale pour l'estimation à courant inconnu)

Un zoom sur la zone du minimum (Figure 3.1, en bas) montre l'existence d'un minimum marqué dans les deux cas. Il n'est pas surprenant de constater que la connaissance du courant d'injection rend la fonction à minimiser encore plus convexe.

### 3.3 Discussion

Dans ce chapitre, nous avons montré comment une implémentation de l'EIT peut être développée à partir de la formulation symétrique de la BEM. Cette nouvelle approche présente deux avantages

- Une formulation physique beaucoup plus naturelle des courants d'injection que dans l'EIT obtenue avec une BEM double couche traditionnelle
- Un coût calculatoire modeste car la matrice du symétrique du problème direct EEG est suffisante pour mener les calculs. Aucun assemblage de matrice supplémentaire n'est nécessaire.

Il n'est cependant pas possible à l'issue de ces travaux de conclure à un gain de précision grâce à cette nouvelle approche. Une étude systématique visant à cette comparaison devrait être envisagée afin de vérifier si la précision supérieure de la formulation symétrique de la BEM pour le problème direct de l'EEG, notamment pour des rapports de conductivité importants, peut mener à une différence notable de précision pour l'EIT.



---

# Deuxième partie

## Problème Inverse



---

# Chapitre 4

## Introduction

Transformer les appareils de mesure que sont l'EEG et la MEG en modalités d'imagerie du cerveau nécessite la résolution d'un *problème inverse*. Il consiste à reconstruire une distribution de sources ayant pu donner naissance aux mesures observées. La non-unicité d'une telle distribution pointe une première et grande différence entre le *problème direct* et le *problème inverse*. En fait, le problème inverse n'est pas injectif et plusieurs configurations de sources peuvent expliquer un même jeu de mesures. Une seconde différence capitale réside dans l'aspect temporel. Cet aspect est exclu de la modélisation du problème direct grâce à l'approximation quasi-statique alors que les méthodes les plus efficaces en problème inverse tirent parti d'une forme de cohérence temporelle.

Dans cette partie, nous consacrons le présent chapitre à la définition de certains concepts de base et aux notations. Un chapitre est ensuite consacré à un état de l'art des méthodes inverses s'attardant sur quelques techniques classiques. Il est suivi d'un chapitre traitant des méthodes d'images prérequisées qui sont adaptées dans le chapitre suivant au problème inverse en MEEG. Le dernier chapitre est consacré aux expériences numériques.

### 4.1 Les sources à estimer

Dans l'introduction de ce mémoire, nous avons montré que les deux principaux phénomènes électriques intervenant dans l'activité cérébrale sont le potentiel d'action et le potentiel post-synaptique. Ces deux phénomènes interviennent à une échelle microscopique : celle du neurone. Le PPS peut être modélisé par un dipôle de courant alors que le PA peut lui être modélisé à l'aide d'un quadrupôle dont l'influence sur le potentiel électrique et le champ magnétique décroît plus rapidement avec la distance. L'activité électrique d'un neurone est en fin de compte modélisée par un dipôle de courant élémentaire. L'activité d'un neurone seul est cependant imperceptible à l'EEG ou à la MEG<sup>1</sup>. Pour obtenir un signal mesurable à l'une de ces deux modalités, il faut cumuler l'activité de plusieurs millions de neurones<sup>2</sup>.

L'existence de sources macroscopiques provient de la juxtaposition de deux facteurs conjoints :

- Une cohérence spatiale due à l'agencement des neurones dans certaines parties du cerveau. On peut citer notamment les cellules pyramidales du cortex qui montrent une direction privilégiée dans leur arborescence dendritique, la direction normale à

---

<sup>1</sup>l'intensité d'un tel dipôle équivalent est d'environ  $20 \text{ fA.m}$

<sup>2</sup>l'intensité typique d'un dipôle visible en MEG/EEG est de  $10 \text{ nA.m}$

la surface du cortex étant clairement avantagée. Ce point est illustré à la figure 4.1.

- Une mise en synchronie des potentiels post-synaptiques lors de l'activation d'une zone du cortex. Il s'agit là d'une forme de cohérence temporelle dans l'activité des neurones qui participe au renforcement du signal MEG/EEG.

En dehors des assemblées corticales de cellules, la structure dipolaire disparaît et les sources plus profondes donnent naissance à des champs de type multipolaire dont l'intensité décroît beaucoup plus vite avec la distance. C'est la raison pour laquelle la MEG et l'EEG sont beaucoup moins sensibles à ces sources (bien que des sources profondes aient pu être localisées en EEG[62] et en MEG[109]).

Nous introduisons maintenant les deux principaux modèles utilisés pour représenter les sources corticales macroscopiques. Le dipôle est utilisé comme une conséquence directe de ce qui précède. Les multiples sont utilisés comme une forme de source paramétrique permettant d'expliquer avec peu de paramètres les mesures générées par une assemblée de dipôles répartis sur une surface contiguë. On parle de *patch*.

### 4.1.1 Dipôle de courant équivalent

C'est le modèle de source de courant le plus utilisé. Il est capable de représenter correctement l'activité électrique d'une surface pouvant atteindre quelques  $cm^2$  de matière grise. Une immense majorité des techniques de reconstruction l'utilise comme source.

En notant  $\mathbf{p}$  la position d'un tel dipôle et  $\mathbf{q}^3$  son moment, le champ magnétique et le potentiel électrique générés dans un milieu homogène de conductivité unité sont donnés par

$$V_{\text{dip}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \mathbf{q} \cdot \frac{\mathbf{r} - \mathbf{p}}{\|\mathbf{r} - \mathbf{p}\|^3}, \quad (4.1)$$

$$B_{\text{dip}}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \mathbf{q} \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{p}}{\|\mathbf{r} - \mathbf{p}\|^3}. \quad (4.2)$$

La source dipolaire que nous venons de décrire n'est que le cas particulier d'une approche plus générale que nous décrivons ici.

### 4.1.2 Sources multipolaires

Ce modèle de source a d'abord été développé en électrocardiographie[66] où les sources macroscopiques présentent une structure moins dipolaire qu'en MEG. Il a ensuite été porté en MEG, plus de 15 ans après, par Mosher et al. dans [83, 65]. Dans ce qui suit, nous nous basons sur [83] pour dresser une brève présentation des multipôles magnétiques.

Dans cette approche, on cherche à modéliser une source de courant suffisamment étendue pour ne pas pouvoir être supposée ponctuelle, et donc, modélisée à l'aide d'un seul dipôle mais suffisamment petite pour que son extension spatiale soit négligeable devant la distance la séparant des capteurs.

On considère ici, un modèle sphérique de tête et on s'intéresse à la composante radiale du champ magnétique. Dans ce cadre, les courants volumiques n'apportent aucune contribution et seuls les courants primaires comptent. On pose  $B_{\mathbf{r}}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{r}}{r} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r})$  cette composante. L'équation de Biot-Savart donne

$$B_{\mathbf{r}}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{r}}{r} \cdot \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\Omega} \frac{\mathbf{r}' \times \mathbf{J}^p(\mathbf{r}')}{d(\mathbf{r}, \mathbf{r}')^3} = \frac{\mathbf{r}}{r} \cdot \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\Omega} \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}')}{d(\mathbf{r}, \mathbf{r}')^3}. \quad (4.3)$$

<sup>3</sup>c'est à l'unité de  $\mathbf{q}$ , l' Ampère-mètre, que l'on doit le terme de *dipôle de courant*



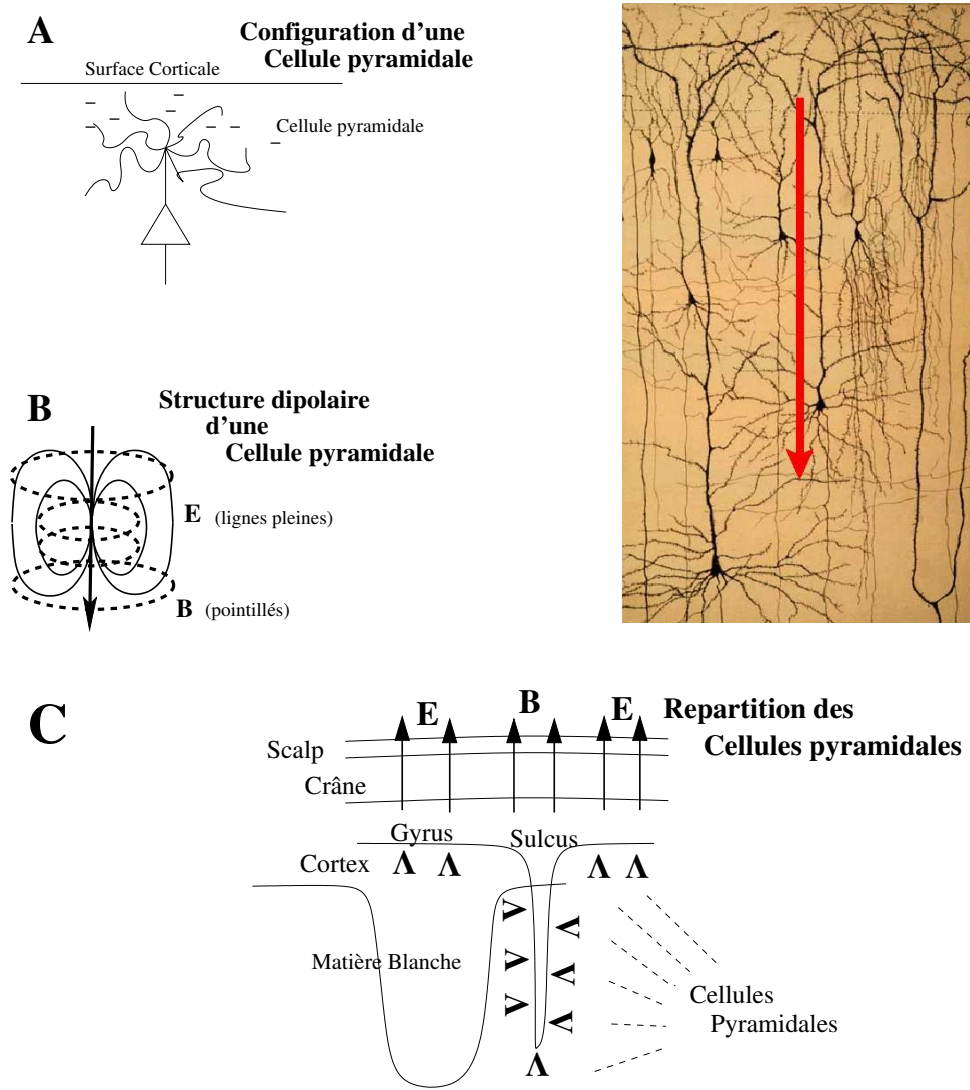


FIG. 4.1 – Le dipôle de courant équivalent.

$\mathbf{M} = \mathbf{r}' \times \mathbf{J}^p(\mathbf{r}')$  est la densité de moment magnétique ou magnétisation. La représentation multipolaire des sources est basée sur un développement en série de Taylor. Pour une fonction scalaire  $\psi$ , on a au voisinage de  $\mathbf{x}$ ,

$$\psi(\mathbf{r} + \mathbf{x}) = \sum_{n=0}^{\infty} (\mathbf{x} \cdot \nabla)^n \psi(\mathbf{r}) / n!.$$

On applique ceci à  $\psi = d(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ . En tenant compte que  $\nabla \mathbf{r} = \mathbf{I}$ ,  $\nabla r^n = \nabla (r \cdot r)^{n/2} = n r^{n-2} \mathbf{r}$  et que  $\nabla d(\mathbf{r}, \mathbf{r}')^n = -\nabla' d(\mathbf{r}, \mathbf{r}')^n = n d(\mathbf{r}, \mathbf{r}')^{n-2} \mathbf{d}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ , on obtient

$$d(\mathbf{r}, \mathbf{r}' + \mathbf{x})^{-3} = d(\mathbf{r}, \mathbf{r}')^{-3} + 3 d(\mathbf{r}, \mathbf{r}')^{-5} (\mathbf{x} \cdot \mathbf{d}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')) + \dots$$

On suppose que le support de  $\mathbf{J}^p$  est centré autour de  $\mathbf{r}_0$  et on suppose que pour tout  $\mathbf{x}$  de ce support, on a  $d(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) \gg \|\mathbf{x}\|$ . Cela permet d'utiliser le développement proposé dans (4.3).

$$B_r(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{r}}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\|^3} \cdot \int_{\Omega} \left( \mathbf{M}(\mathbf{r}_0 + \mathbf{x}) + \frac{3 \mathbf{M}(\mathbf{r}_0 + \mathbf{x})}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\|^2} \mathbf{x} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) + \dots \right) d\mathbf{x}$$

Comme  $\|\mathbf{x}\| \ll \|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\|$ , on peut négliger les termes d'ordres supérieurs.

Si on considère  $\mathbf{J}^p = \mathbf{q} \cdot \delta_{\mathbf{r}_0}$  alors seul le premier terme est non nul et on retrouve la source dipolaire classique. Dans le cas où le support de  $\mathbf{J}^p$  n'est pas réduit à  $\{\mathbf{r}_0\}$ , le nombre de termes à prendre en considération dépend de l'étendue de la source<sup>4</sup>.

Le développement de ces modèles de sources dans un cadre plus général que celui de la composante sphérique du champ magnétique pour un modèle sphérique est possible. De plus, il existe un autre type de modélisation de sources par développement multipolaire. Ce sont les multipôles de courant. Nous renvoyons à [65] et [64] pour une présentation détaillée de tous les modèles multipolaires utilisés en MEG.

## 4.2 EEG et MEG, des visions différentes d'un même phénomène

La MEG et l'EEG mesurent deux grandeurs physiques issues du même phénomène physique et sont régies par des équations communes. Il n'en demeure pas moins que ces deux modalités donnent accès à des informations qualitativement différentes. Pour s'en convaincre, on se place encore une fois dans le cadre d'un modèle de tête sphérique qui malgré son côté très simplificateur permet de bien fixer quelques idées.

Le premier fait remarquable est probablement l'absence de sensibilité de la MEG aux conductivités électriques alors que ces dernières (et notamment la faible conductivité du crâne) sont à l'origine de la limitation de la résolution spatiale de l'EEG.

Les courants volumiques sont un exemple de notion que ne partagent pas l'EEG et la MEG. Cette notion n'a de sens que dans le cadre de la MEG et encore, ces courants n'ont aucune influence sur la composante radiale du champ magnétique. Les courants primaires étant la grandeur d'intérêt en MEG, c'est la raison pour laquelle la plupart des machines de MEG sont équipées de capteurs disposés de manière radiale. En contrepartie, le champ magnétique n'est pas affectée par une source dipolaire radiale, ce qui rend la MEG aveugle à beaucoup de sources potentielles. L'EEG ne souffre pas de ce défaut et possède une sensibilité à toutes les orientations de sources. De plus, le potentiel électrique ayant une décroissance moindre que le champ magnétique, l'EEG possède un "champ de vision" plus profond que la MEG.

Finalement, chaque modalité est aveugle à un certain type de source. Une distribution de sources radiales sera invisible pour la MEG alors qu'une boucle de courant ne génère aucun potentiel susceptible d'influer sur les mesures EEG.

Fort heureusement, 60% de la surface du cortex se trouve dans les sillons (où la normale au cortex est tangentielle et non radiale). Cela a pour effet de limiter l'aveuglement de la MEG. Une modulation de ces explications qualitatives doit également être prise en compte du fait du caractère non sphérique de la tête, l'insensibilité devant être remplacée par une sensibilité notablement moindre.

Enfin, certains travaux tendent à utiliser le caractère complémentaire des informations fournies par la MEG et l'EEG [9].

---

<sup>4</sup>plus précisément de la valeur de ses différents moments, c'est de cela qu'il est question !

### 4.3 Un problème mal posé

Le problème inverse en MEEG fait partie de ces problèmes dit *mal posés* au sens de Hadamard.

Etant donné un opérateur  $H$ , le problème inverse consistant à résoudre  $H\mathbf{x} = \mathbf{m}$  pour  $\mathbf{m}$  donné est dit *bien posé* au sens de Hadamard quand il vérifie les trois conditions suivantes :

- pour tout  $\mathbf{m}$ , il existe au moins une solution  $\mathbf{x}$  au problème
- pour tout  $\mathbf{m}$ , la solution  $\mathbf{x}$  est unique
- la solution  $\mathbf{x}$  dépend continûment de  $\mathbf{m}$

Pour le problème inverse MEEG,  $\mathbf{x}$  est la source que l'on cherche à reconstruire et  $\mathbf{m}$  et le jeu de mesures MEEG. Bien que pour chaque jeu de mesures, on puisse trouver une distribution de sources expliquant les mesures, le problème est mal posé car les deux autres conditions ne sont pas systématiquement vérifiées :

- comme nous l'avons évoqué précédemment, il existe des distributions de sources silencieuses à la MEG ou à l'EEG. Une solution au problème inverse ne peut donc être déterminée qu'à l'une de ces distributions près. Ce point est contourné par de nombreuses méthodes inverses en contraignant la source à reconstruire. Si l'on cherche par exemple à expliquer un jeu de mesures à l'aide d'un dipôle de courant équivalent, le problème est sur-contraint et ce phénomène disparaît.
- la solution  $\mathbf{x}$  ne dépend pas continûment de  $\mathbf{m}$  de telle sorte qu'un bruit d'un niveau très faible s'ajoutant aux mesures  $\mathbf{m}$  peut créer un grand écart entre la solution à ce problème et celle du problème non perturbé. Pour s'affranchir de cette hypersensibilité au bruit, toutes les méthodes inverses s'autorisent une marge d'erreur sur les mesures que l'on nomme dans ce contexte *variance résiduelle*.

A ces deux problèmes théoriques cruciaux s'ajoute une limitation pratique résidant dans la sous-détermination numérique du problème due au faible nombre de mesures (typiquement 200).

### 4.4 Définitions, notations

Dans ce qui suit, nous introduisons quelques notations et quelques concepts communs à plusieurs méthodes inverses que nous présentons par la suite. Dans la plupart de ces méthodes, on ne fait pas référence de manière explicite à la méthode directe utilisée ou au modèle de tête employé. Tout ceci est contenu dans la matrice de gain. Les définitions qui suivent sont uniquement données pour des sources dipolaires. Leur extension à des sources multipolaires ne pose aucun problème mais alourdirait inutilement cet exposé. De même, plusieurs des méthodes inverses que nous présentons ensuite peuvent s'adapter à des sources multipolaires, nous le signalerons le cas échéant.

#### 4.4.1 Matrice de gain, lead field et forward field

Lorsque les sources sont modélisées à l'aide de dipôles, le principe de superposition montre que le problème direct est linéaire par rapport au moment du dipôle. Ainsi, pour un dipôle situé en  $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3$  possédant un moment  $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^3$  et un point d'observation  $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$ , il existe un vecteur  $\mathbf{g}(\mathbf{r}, \mathbf{p})$  tel que la mesure en  $\mathbf{r}$  s'exprime

$$m(\mathbf{r}) = \mathbf{g}(\mathbf{r}, \mathbf{p}) \cdot \mathbf{q}$$

$\mathbf{g}(\mathbf{r}, \mathbf{p})$  est le vecteur de *Lead Field* associé à l'emplacement  $\mathbf{p}$  et au point d'observation  $\mathbf{r}$ .

Le moment du dipôle est souvent décomposé dans la base canonique de  $\mathbb{R}^3$  ( $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ ) de telle sorte qu'on a  $\mathbf{q} = q_x \mathbf{e}_x + q_y \mathbf{e}_y + q_z \mathbf{e}_z$ . Cette base est souvent appelée source<sup>5</sup> régionale ou dipôle tournant<sup>6</sup>[87] et sert de modèle d'activation locale en  $\mathbf{p}$ .

Les trois composantes du vecteur  $\mathbf{g}(\mathbf{r}, \mathbf{p})$  sont formées en résolvant successivement le problème direct (MEG ou EEG) sur trois dipôles placés en  $\mathbf{p}$  et de moment respectifs  $\mathbf{e}_x$ ,  $\mathbf{e}_y$  et  $\mathbf{e}_z$ . Des formes explicites de ce vecteur sont données pour différents cas dans [86].

Dans le cas de plusieurs dipôles situés en  $\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_p$  et de moments respectifs  $\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_p$ , il suffit d'ajouter les contributions individuelles de chaque dipôle et chaque mesure  $m_k$  pour  $1 \leq k \leq m$  peut donc se mettre sous la forme

$$m(\mathbf{r}) = \sum_{j=1}^p \mathbf{g}(\mathbf{r}, \mathbf{p}_j) \cdot \mathbf{q}_j,$$

$m(\mathbf{r}_k)$  pouvant être une mesure de potentiel en EEG ou une mesure d'une composante du champ magnétique en MEG. On peut mettre cette écriture sous forme matricielle et on a

$$\mathbf{m} = \begin{bmatrix} m(\mathbf{r}_1) \\ \vdots \\ m(\mathbf{r}_m) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{g}^T(\mathbf{r}_1, \mathbf{p}_1) & \dots & \mathbf{g}^T(\mathbf{r}_1, \mathbf{p}_p) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{g}^T(\mathbf{r}_m, \mathbf{p}_1) & \dots & \mathbf{g}^T(\mathbf{r}_m, \mathbf{p}_p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{q}_p \end{bmatrix} = \mathbf{G}\mathbf{q}. \quad (4.4)$$

$\mathbf{G}$  est appelée matrice de gain. Elle lie les moments des  $q$  dipôles aux  $m$  mesures MEG ou EEG.

Chaque colonne de  $\mathbf{G}$  représente la signature d'un dipôle élémentaire sur toutes les mesures et est appelée *forward field* ou vecteur de gain associé à ce dipôle. De manière similaire, chaque ligne de la matrice  $\mathbf{G}$  représente un vecteur du *lead field* regroupant les vecteurs de lead field de chaque mesure.

#### 4.4.2 Modèles spatio-temporels

Le modèle précédent peut être étendu de manière immédiate à  $T$  échantillons temporels. Pour ce faire, il suffit de juxtaposer les  $T$  échantillons des moments des dipôles dans une matrice  $\mathbf{Q}$  à  $T$  colonnes remplaçant le vecteur  $\mathbf{q}$ . Le produit de cette matrice avec la matrice  $\mathbf{G}$  (à gauche) fournit une matrice  $\mathbf{M}$  à  $T$  colonnes qui remplace le vecteur  $\mathbf{m}$  et qui contient les échantillons temporels des mesures.

Dans ce modèle, chaque ligne de  $\mathbf{Q}$  représente le décours temporel d'un dipôle élémentaire. Si aucune contrainte n'est mise sur le décours de chacun des 3 dipôles élémentaires de la source régionale, le moment résultant semble tourner dans le temps (d'où le terme *rotating dipole*). Cette liberté n'étant pas toujours souhaitable, on contraint souvent le moment de chaque dipôle à avoir une orientation fixée  $\mathbf{u}$  en ne laissant en variable libre dans le temps que l'amplitude du moment  $\underline{s}$ . Formellement, cela s'écrit

$$\begin{bmatrix} q_x(1) & \dots & q_x(T) \\ q_y(1) & \dots & q_y(T) \\ q_z(1) & \dots & q_z(T) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s(1) & \dots & s(T) \end{bmatrix} = \mathbf{u} \underline{s}^T.$$

<sup>5</sup>regional source

<sup>6</sup>rotating dipole

Dans ce cadre, l'équation (4.4) devient

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m(\mathbf{r}_1, 1) & \dots & m(\mathbf{r}_1, T) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m(\mathbf{r}_m, 1) & \dots & m(\mathbf{r}_m, T) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{g}(\mathbf{r}_1, \mathbf{p}_1) \cdot \mathbf{u}_1 & \dots & \mathbf{g}(\mathbf{r}_1, \mathbf{p}_p) \cdot \mathbf{u}_p \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{g}(\mathbf{r}_m, \mathbf{p}_1) \cdot \mathbf{u}_1 & \dots & \mathbf{g}(\mathbf{r}_m, \mathbf{p}_p) \cdot \mathbf{u}_p \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}(\{\mathbf{p}_i, \mathbf{u}_i\})} \underbrace{\begin{bmatrix} s_1(1) & \dots & s_1(T) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ s_p(1) & \dots & s_p(T) \end{bmatrix}}_{\mathbf{S}^\top}. \quad (4.5)$$

Avec cette formulation, les paramètres de notre problème direct sont la position des sources  $\mathbf{p}_i$  et leurs orientations  $\mathbf{u}_i$  qui en sont les paramètres non linéaires ainsi que leurs amplitudes qui constituent les paramètres linéaires.



---

## Chapitre 5

# Etat de l'art des méthodes inverses

Les méthodes de résolution du problème inverse en MEEG peuvent être scindées en deux catégories.

Les méthodes paramétriques d'une part, assimilent la source à un ensemble de dipôles dont il s'agit alors d'estimer les paramètres tant linéaires (amplitudes des dipôles) que non linéaires (positions et moments des dipôles). Cela donne lieu à des problèmes d'optimisation non-linéaires sur-contraints, qui sont donc bien posés mais difficiles à résoudre d'un point de vue algorithmique. Les modèles multipolaires sont généralement intégrés dans ce cadre en se contentant d'augmenter le nombre de paramètres à estimer et permettent de représenter des sources moins focales.

Les approches distribuées ( ou approches *image*) quant à elles, utilisent comme source une distribution de dipôles répartis sur le cortex de moments perpendiculaires à la surface de ce dernier.

Ainsi posé, le problème inverse ne requiert que l'estimation de paramètres linéaires : l'amplitude des dipôles. Le problème d'optimisation afférant possède en un certain sens des caractéristiques opposées à celui issu des méthodes paramétriques. Le nombre de dipôles étant bien plus grand que le nombre de mesures, le problème est très largement sous-contraint et une régularisation est nécessaire pour établir une solution d'intérêt parmi toutes les solutions possibles. La dépendance linéaire aux paramètres recherchés rend l'aspect algorithmique moins délicat. Ces méthodes sont davantage dédiées à la détection d'activation hautement non focales sur des surfaces étendues.

Les méthodes paramétriques et distribuées ne sont donc pas concurrentes mais plutôt complémentaires.

Dans la suite de cette section, nous parcourons une sélection de méthodes inverses de ces deux catégories en soulignant leur domaine de validité.

### 5.1 Estimation par moindres carrés

Dans un cadre réaliste, les mesures MEEG peuvent être modélisées comme le résultat d'un problème direct entaché d'une erreur de mesure contenue dans une matrice de bruit spatio-temporel  $\mathbf{N}$ .

$$\mathbf{M} = \mathbf{A}(\{\mathbf{p}_i, \mathbf{u}_i\}) \mathbf{S}^T + \mathbf{N} \quad (5.1)$$

$\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{S}$  sont les matrices introduites en 4.4.2.

Pour déterminer  $\mathbf{p}_i$ ,  $\mathbf{u}_i$  et  $\mathbf{S}$  à partir de  $\mathbf{M}$ , l'approche la plus directe est de fixer le nombre de sources  $p$  et d'utiliser un algorithme de minimisation non linéaire pour trouver le minimum de l'erreur quadratique entre les mesures effectuées et celles calculées à l'aide du problème direct.

Cette erreur s'écrit sous la forme

$$J_{LS}(\{\mathbf{p}_i, \mathbf{u}_i\}, \mathbf{S}) = \|\mathbf{M} - \mathbf{A}(\{\mathbf{p}_i, \mathbf{u}_i\}) \mathbf{S}^\top\|_F^2. \quad (5.2)$$

La minimisation de (5.2) peut se réécrire en tenant compte de l'expression analytique du minimum de  $J_{LS}$  par rapport à sa variable linéaire  $\mathbf{S}$ . Pour un ensemble de paramètres  $\{\mathbf{p}_i, \mathbf{u}_i\}$  la valeur de  $\mathbf{S}$  qui minimise  $J_{LS}$  est

$$\mathbf{S} = \mathbf{A}(\{\mathbf{p}_i, \mathbf{u}_i\})^\# \mathbf{M}.$$

$\mathbf{A}^\#$  est le pseudoinverse[46] de  $\mathbf{A}$ . La quantité (5.2) peut donc s'écrire :

$$J_{LS}(\{\mathbf{p}_i, \mathbf{u}_i\}, \mathbf{S}) = \|\mathbf{M} - \mathbf{A}(\mathbf{A}^\# \mathbf{M})\|_F^2 = \|(I - \mathbf{A} \mathbf{A}^\#) \mathbf{M}\|_F^2 = \|\mathbf{P}_A^\perp \mathbf{M}\|_F^2 \quad (5.3)$$

On omet d'écrire les dépendances en  $\{\mathbf{p}_i, \mathbf{u}_i\}$  des termes impliquant  $\mathbf{A}$  pour des raisons de clarté.  $\mathbf{P}_A^\perp \mathbf{M}$  est le projecteur orthogonal sur le noyau de  $\mathbf{A}^\top$ .

La minimisation de  $J_{LS}$  peut être menée sur la forme 5.3 grâce, par exemple, à une méthode du simplex [41]. D'autres simplifications peuvent être menées sur  $J_{LS}$  à l'aide de SVDs[87].

Cette technique peut être appliquée successivement à chaque instant d'un bloc de données ou sur tout le bloc simultanément. Dans le premier cas, les dipôles recherchés peuvent bouger d'un instant au suivant, on parle de dipôle mobile (*moving dipole*). Dans le second cas, le dipôle est contraint à posséder une position et une orientation fixe sur tout l'intervalle temporel et l'ajustement aux moindres carrés est effectué sur toute la matrice  $\mathbf{M}$ . Ce modèle qui a montré son efficacité en MEG et en EEG dans de nombreux cas est appelé le dipôle fixe (*fixed dipole*). C'est encore le plus utilisé de nos jours dans des contextes cliniques ou expérimentaux.

Le point faible de ces méthodes reste la détermination du nombre  $p$  de dipôles a priori. Bien que de nombreux algorithmes essayant d'ajuster ce nombre de manière automatique aient été proposés, ce problème est encore résolu en pratique par des experts humains : des reconstructions sont calculées avec des nombres de dipôles différents et la solution la plus plausible dans le contexte est retenue. Ceci est crucial dans la mesure où l'adéquation aux données est d'autant meilleure d'un point de vue quantitatif que le nombre de dipôles a priori est grand. Mais cela ne préjuge pas de l'aspect qualitatif que seul l'expert peut juger. De plus, la non-convexité de la fonctionnelle  $J_{LS}$  augmente avec  $p$ , entraînant des chances accrues de ne trouver qu'un minimum local lors de la minimisation. La seule parade à ce problème est l'utilisation d'algorithmes de recherche de minima globaux rarement très commodes et efficaces. Les méthodes analytiques que nous exposons plus loin semblent résoudre ce problème du nombre de sources de manière plus élégante et automatique.

## 5.2 Méthodes de balayage

Ces méthodes évitent les problèmes de non-convexité rencontrés avec l'estimation par moindres carrés. Elles balayent à la recherche d'une source une région d'intérêt qui peut varier d'un unique emplacement au volume du cerveau tout entier. Une telle méthode peut



être mise en oeuvre par filtrage spatial ou par classification de signaux. Ces techniques ne nécessitent pas d'a priori sur le nombre de sources recherchées, ce qui comble une deuxième faiblesse de l'estimation par moindres carrés.

### 5.2.1 Beamforming

Le *beamformer* est une technique qui tente de simuler le signal d'une électrode virtuelle profonde. Pour ce faire, on cherche le signal  $y(t)$  de cette électrode virtuelle sous la forme d'une combinaison linéaire des signaux des autres électrodes. On note  $\mathbf{w}$  cette combinaison linéaire et on a

$$y(t) = \mathbf{w} \cdot \mathbf{m}(t).$$

Le vecteur  $\mathbf{w}$  est déterminé de manière à réagir aux signaux émanant de l'emplacement  $\mathbf{p}$  (pour un dipôle source  $\mathbf{p}, \mathbf{q}$ ). De plus,  $y(t)$  doit être nul si  $p$  n'est pas l'emplacement d'une vraie source. Pour procéder à un balayage, le vecteur  $\mathbf{w}$  est adapté à chaque itération pour tester un nouvel emplacement. On surveille alors le niveau de sortie de l'électrode virtuelle pour trouver les sources.

La technique du *beamforming* est issue du traitement des signaux RADAR et SONAR et a du subir quelques adaptations pour être appliquée au problème inverse MEEG. De bonnes revues sur cette technique figurent dans [116] et [68].

La forme la plus simple du beamformer balaye une seule position de dipôle caractérisé par sa position  $\mathbf{p}$  et son moment normalisé  $\mathbf{u}$ . Le vecteur  $\mathbf{w}$  associé est le vecteur de forward field associé à ce dipôle renormalisé

$$\mathbf{w} = \mathbf{a}(\mathbf{p}, \mathbf{u}) / \|\mathbf{a}(\mathbf{p}, \mathbf{u})\|^2.$$

Ce vecteur produit bien une réponse égale à 1 en  $\mathbf{p}, \mathbf{u}$  mais sa sélectivité est incontrôlable et inquantifiable car d'autres dipôles (de même orientation et de position voisine par exemple) peuvent présenter un forward field très corrélé.

C'est cet inconvénient que tente de surmonter une autre classe de beamformers en essayant non seulement d'identifier une source particulière mais aussi de bloquer les signaux issus d'autres sources. Dans cette classe, nous exposons le *Linearly Constrained Minimum Variance Beamforming* (LCMV) qui est conçu de sorte à minimiser la puissance de sortie sous contrainte que les signaux de la zone d'intérêt soient passés avec un gain donné (typiquement 1) :

$$\min_{\mathbf{w}} \mathbf{w}^T \mathbf{R}_{\mathbf{m}} \mathbf{w} \quad , \quad \text{sous contrainte de} \quad \mathbf{C}^T \mathbf{w} = \mathbf{f}$$

où  $\mathbf{R}_{\mathbf{m}} = \mathbf{R}\{\mathbf{m}(\mathbf{t})\mathbf{m}(\mathbf{t})^T\}$  est la matrice de covariance des mesures,  $\mathbf{C}$  la matrice des contraintes et  $\mathbf{f}$  le vecteur des gains désirés. La solution de ce problème d'optimisation est donnée par

$$\mathbf{w} = \mathbf{R}_{\mathbf{m}}^{-1} \mathbf{C} (\mathbf{C}^T \mathbf{R}_{\mathbf{m}}^{-1} \mathbf{C})^{-1} \mathbf{f}.$$

Dans [107] par exemple, les auteurs contraignent la réponse de trois dipôles de moments orthogonaux et au même emplacement, à être unitaire. Cela permet d'obtenir l'orientation éventuelle d'un dipôle à un tel emplacement. D'autres approches permettent de filtrer une plus grande région mais cela réduit le nombre de degrés de liberté pour éliminer les interférences. Il s'en suit un appauvrissement de la sélectivité du beamformer.

Une limitation des approches de beamforming réside dans l'annulation des signaux. Cette dernière est due à deux raisons principales. Les erreurs de modélisations d'une part,

donnent lieu à des contraintes imprécises. En conséquence, le beamformer atténue au moins partiellement le signal des sources recherchées. D'un point de vue pratique, d'autre part, il n'est pas rare que des processus cérébraux se retrouvent synchronisés suite à un stimulus. Une corrélation temporelle apparaît alors dans les signaux des différentes sources et le beamformer atténue alors le signal de chacune d'entre elles. Idéalement, le signal recherché devrait être orthogonal à tous les autres signaux et, c'est là, la principale limitation de ces approches.

Les méthodes de beamforming à haute résolution peuvent s'affranchir de cet inconvénient. MUSIC est l'une d'entre elles.

### 5.2.2 MUSIC et RAP-MUSIC

L'approche MUSIC (*Multiple Signals Classification*) a d'abord été développée dans le domaine du traitement du signal et fut importée dans le domaine de la MEEG par Mosher et al. en 1992 [87]. Nous exposons ici une approche MUSIC dans le cas de dipôles de moment fixe. Nous conservons les mêmes notations en nous plaçant dans le cadre de l'équation (5.1) que nous détaillons en la réécrivant comme suit :

$$\mathbf{M} = \sum_{j=1}^p \mathbf{a}(\mathbf{p}_j, \mathbf{u}_j) \mathbf{s}_j^T + \mathbf{N}. \quad (5.4)$$

Dans (5.4),  $\mathbf{a}(\mathbf{p}_i, \mathbf{u}_i)$  est une colonne de la matrice  $\mathbf{A}$  précédemment définie représentant le forward field d'un seul dipôle.

Soit  $\mathbf{M} = \mathbf{U} \mathbf{D} \mathbf{V}^T$  une *décomposition en valeurs singulières* (SVD) de  $\mathbf{M}$  [46].

Les colonnes de la matrice  $\mathbf{U}$  forment une famille génératrice pour l'espace engendré par les données. Si  $p$  est plus petit que le nombre de capteurs et si le bruit sur les capteurs est i.i.d., on peut décomposer cet espace comme la somme directe du sous-espace des signaux et du sous-espace du bruit. Les bases respectives de ces sous-espaces peuvent être obtenues en considérant respectivement les  $p$  premières colonnes de  $\mathbf{U}$  que l'on note  $\mathbf{U}_p$  et toutes les autres colonnes. On peut alors définir les projecteurs orthogonaux sur l'espace des signaux  $\mathbf{P}_S = \mathbf{U}_p \mathbf{U}_p^T$  et sur l'espace du bruit  $\mathbf{P}_S^\perp = \mathbf{I} - \mathbf{U}_p \mathbf{U}_p^T$ . La meilleure approximation de  $\mathbf{M}$  de rang  $p$  est alors donnée par  $\mathbf{M}_S = \mathbf{P}_S \mathbf{M}$ .

On définit ensuite la fonction de coût

$$J_{MUSIC}(\mathbf{p}, \mathbf{u}) = \frac{\|\mathbf{P}_S^\perp \mathbf{a}(\mathbf{p}, \mathbf{u})\|_2^2}{\|\mathbf{a}(\mathbf{p}, \mathbf{u})\|_2^2}. \quad (5.5)$$

$J_{MUSIC}$  est nulle pour les couples  $(\mathbf{p}_i, \mathbf{u}_i)$  des sources recherchées. L'avantage de  $J_{MUSIC}$  par rapport à  $J_{LS}$  est la possibilité de chercher un minimum, en parcourant l'ensemble des configurations pour chaque source, une à une, plutôt que pour toutes les sources en même temps. La réduction de dimensionnalité du problème est conséquente. De plus, Il est possible, comme dans les cas des moindres carrés, de factoriser l'orientation. L'énergie (5.5) devient

$$J_{MUSIC}(\mathbf{p}) = \frac{\|\mathbf{P}_S^\perp \mathbf{G}(\mathbf{p})\|_2^2}{\|\mathbf{G}(\mathbf{p})\|_2^2} \quad (5.6)$$

Dans ce cas,  $\mathbf{G}(\mathbf{p})$  est la matrice de gain à trois colonnes, correspondant aux trois dipôles élémentaires associés à l'orientation du moment.

Les positions des sources  $\mathbf{p}_i$  sont déterminées par les zéros de  $J_{MUSIC}$ . Leurs moments  $\mathbf{q}_i$  sont déterminés par un simple calcul de vecteurs propres[87]. Le décours temporel des sources est calculé de la même manière que dans le cas des moindres carrés, à l'aide d'un pseudo-inverse.

La localisation des sources est assurée en évaluant  $1/J_{MUSIC}$  sur une grille de points suffisamment resserrée et en recherchant les maxima de cette fonction<sup>1</sup>. C'est généralement cette étape de détection d'extrema<sup>2</sup> qui pose le plus de problèmes en pratique. Les erreurs de modélisation et les corrélations entre sources rendent, en effet, difficile la détection de tous les "pics" sans en manquer certains ou en assimiler des proches. Certaines approches tentent de régler ce problème tandis que d'autres l'évitent complètement. On peut citer notamment *Recursively Applied and Projected MUSIC (RAP-MUSIC)* qui itère MUSIC en retirant du signal, à chaque étape, la composante des mesures correspondant à la source trouvée à l'itération précédente.

L'efficacité des algorithmes de type MUSIC est conditionnée par trois facteurs principaux :

- L'indépendance temporelle des sources à estimer est cruciale. MUSIC est en effet une méthode linéaire de classification de signaux. Si le décours temporel d'une source peut s'écrire comme la combinaison linéaire de décours temporels d'autres sources, l'algorithme échouera dans la reconstruction de ces sources. Une modification du modèle des dipôles uniques est proposée dans [85] pour pallier à ce problème.
- La stationnarité des signaux d'intérêt est garante de l'estimation correcte des sous-espaces des signaux et du bruit. Cette stationnarité sous-jacente ne peut être exploitée que dans le cas d'un bruit faible. Ce n'est pas le cas de manière générale en MEEG et le moyennage des signaux de plusieurs répétitions de la même expérience permet d'abaisser de manière notable le niveau de bruit. Cette démarche ne peut cependant pas s'appliquer à des sources dont le décours temporel présente des fréquences assez élevées. Leur influence serait alors annihilée par l'effet passe-bas de ce procédé.
- Comme la détermination du rang (le nombre de sources) est optimale en cas de bruit blanc, il est préférable d'appliquer une technique de blanchiment du bruit qui utilise la période d'inactivité précédant le stimulus dans une expérience<sup>3</sup> [87].

### 5.3 Méthodes analytiques

Les méthodes que nous présentons dans cette section ont été développées pour le problème inverse en EEG. Elle ne prennent pas (encore) en compte l'aspect temporel du problème inverse et utilisent des modèles sphériques à conductivité constante par morceaux. La contrainte du modèle sphérique peut être réduite à la sphéricité de l'interface la plus interne. Les sources reconstruites sont de type monopolaire ou dipolaire.

On garde les notations introduites dans la partie I dans laquelle les volumes  $\Omega_1, \dots, \Omega_{N+1}$  sont séparés par les interfaces  $S_1, \dots, S_N$ . Les sources sont modélisées par un ensemble de dipôles de courant de moments  $\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_p$  et de positions  $\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_p$ .

Une première étape commune à toutes les méthodes algébriques réside dans la propagation, à l'interface sphérique  $S_1$ , du potentiel électrique mesuré sur l'interface  $S_N$ . Cela

<sup>1</sup>L'utilisation de la quantité  $1/J$  compense l'utilisation de  $P_S$  à la place de  $P_S^\perp$  dans (5.6) qui inverse les variations de  $J_{MUSIC}$

<sup>2</sup>connue sous le nom de *peak picking*

<sup>3</sup>on parle de *baseline*

revient à calculer  $v_{S_1}$  et  $\frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}_{S_1}}$  à partir de  $v_{S_N}$  qui est mesuré par l'EEG et  $\frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}_{S_1}}$  qui est nul car aucun courant ne sort de la tête. Il s'agit d'une suite de problèmes de Cauchy successifs dans  $\Omega_N, \Omega_{N-1}, \dots, \Omega_2$  qui peut être traitée par une technique itérative régularisante[67]. Une fois ce transfert de conditions aux bords effectué, le problème inverse revient à identifier les paramètres  $(\mathbf{p}_j)$ ,  $(\mathbf{q}_j)$  et l'entier  $p$  de telle sorte qu'il existe une solution à l'équation

$$\begin{cases} -\Delta u = \sum_{k=1}^p \mathbf{q}_k \cdot \nabla \delta_{\mathbf{p}_k} & \text{dans } \Omega_1 \\ \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = w_1 & \text{sur } S_1 \\ u = v_1 & \text{sur } S_1 \end{cases} \quad (5.7)$$

où  $v_1$  et  $w_1$  désignent respectivement les conditions à l'interface  $S_1$  pour le potentiel et sa dérivée normale.

Les deux techniques que nous présentons diffèrent dans leur manière de résoudre 5.7.

### 5.3.1 Méthode algébrique

L'approche présentée dans [18] s'appuie sur la notion *reciprocity gap functional*. Il s'agit de la fonctionnelle

$$R(u) = \langle w_1, u \rangle_{\mathbf{H}^{\frac{1}{2}}(S_1), \mathbf{H}^{-\frac{1}{2}}(S_1)} - \langle v_1, \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \rangle_{\mathbf{H}^{\frac{1}{2}}(S_1), \mathbf{H}^{-\frac{1}{2}}(S_1)}$$

qui est définie pour toute fonction harmonique  $u \in \mathbf{H}(\Omega_1) = \{u \in \mathbf{H}^1(\Omega_1) / \Delta u = 0\}$ . Grâce à la formule de Green, on montre que l'on a

$$R(u) = - \sum_{k=1}^p \mathbf{q}_k \cdot \nabla u(\mathbf{p}_k), \quad \forall u \in \mathbf{H}(\Omega_1) \quad (5.8)$$

On suppose, de plus, que l'on dispose d'un majorant du nombre de dipôles sources  $P$  (ce qui représente un a priori très faible).

On se place ensuite dans  $\mathbb{R}^2$  dans le plan  $xOy$  que l'on assimile au plan complexe. On suppose, par ailleurs, que les vecteurs  $(\mathbf{p}_j)$  et  $(\mathbf{q}_j)$  sont contenus dans ce plan.

On définit les polynômes harmoniques

$$U_j(x, y) = (x + iy)^j \quad \forall j \in N$$

et les nombres

$$\beta_j \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{R(U_j)}{j} = \sum_{k=1}^P (\overline{\mathbf{q}_k}) \overline{\mathbf{p}_k}^{j-1} \quad 1 \leq j \leq 2P-1 \quad (5.9)$$

où  $\overline{\mathbf{p}_k}$  et  $\overline{\mathbf{q}_k}$  désignent les affixes respectives de  $\mathbf{p}_k$  et  $\mathbf{q}_k$  dans le plan complexe.

Des considérations algébriques montrent alors que la famille de vecteurs  $(\underline{\eta}_j)$  définis par

$$\underline{\eta}_j = \begin{pmatrix} \beta_j \\ \beta_{j+1} \\ \vdots \\ \beta_{P+j-1} \end{pmatrix} \in C^P, \quad 1 \leq j \leq P \quad (5.10)$$

est de rang  $p$  et que la sous-famille  $(\underline{\eta}_j)_{1 \leq j \leq p}$  est indépendante. On restreint ensuite les vecteurs de cette sous-famille à leurs  $p$  premières composantes et on définit la matrice  $T$  telle que

$$\underline{\eta}_{j+1} = T \eta_j \quad 1 \leq j \leq p$$

Un autre calcul algébrique permet de montrer que  $\overline{\mathbf{p}_k}$  sont les valeurs propres de  $T$ . Ainsi, la détermination du rang fournit le nombre de sources et le calcul du spectre de la matrice  $T$  donne les positions de ces sources. Le calcul du moment de ces sources peut se faire à l'aide des équations (5.8) et (5.9).

Pour le cas 3D, la même approche est utilisée avec des polynômes harmoniques ne dépendant pas de  $z$ . On suppose que les projections  $\tilde{\mathbf{p}}_k$  des  $\mathbf{p}_k$  sur le plan  $xOy$  sont distinctes et que les projections  $\tilde{\mathbf{q}}_k$  des moments  $\mathbf{q}_k$  sont non nulles. La méthode 2D permet alors de calculer les  $\mathbf{p}_k$  et les  $\mathbf{q}_k$ . Il existe ensuite plusieurs moyens de récupérer la troisième composante des vecteurs ainsi calculés, l'une d'entre elle consistant à reprendre l'algorithme 2D sur un autre plan.

### 5.3.2 Approximation méromorphe

L'approche proposée dans [12] procède également en ramenant l'espace dans le plan complexe.

Dans ce qui suit, nous nous plaçons dans le cas d'une unique source dipolaire et nous suivons les développements exposés dans [12].

Le potentiel électrique généré par la source dipolaire  $(\mathbf{p}_1, \mathbf{q}_1)$  est donné par (4.1). En notant  $\mathbf{p}_1 = (x_p, y_p, z_p)^T$  et  $\mathbf{q}_1 = (x_q, y_q, z_q)^T$ , on obtient le potentiel  $v$  généré par ce dipôle dans  $\Omega_1$  (on suppose que la partie harmonique est nulle)

$$u(x, y, z)^2 = \frac{1}{16\pi^2} \frac{[x_q(x - x_p) + y_q(y - y_p) + z_q(z - z_p)]^2}{[(x - x_p)^2 + (y - y_p)^2 + (z - z_p)^2]^3}$$

On se place maintenant dans le plan  $z = z'$  avec  $z'$  un réel fixé. La fonction  $u$  est une fraction rationnelle dont le dénominateur est  $Q_{z'}(x, y, z)^3$  avec

$$Q_{z'}(x, y)^3 = (x - x_p)^2 + (y - y_p)^2 + (z' - z_p)^2$$

et on définit les quantités  $r_{z'}^2 = 1 - z'^2$  et  $h = z' - z_p$ .

On assimile le plan  $z = z'$  au plan complexe et l'on pose  $\xi = x + iy \in D_{z'}$  le disque de centre 0 et de rayon  $r_{z'}$  (l'intersection du plan  $z = z'$  avec la boule unité). On note  $\xi_p = x_p + iy_p$ , l'affixe du point  $\mathbf{p}_1$  dans le plan considéré et  $T_{z'} = \partial D_{z'}$ .

Pour  $\xi \in T_{z'}$ , on a

$$Q_{z'}(\xi) = |\xi - \xi_p|^2 + h^2 = (\xi - \xi_p) \left( \frac{r_{z'}^2}{\xi} - \overline{\xi_p} \right) = -\frac{\xi_p}{xi} (\xi - \xi_{z'}^-) (\xi - \xi_{z'}^+)$$

où  $\xi_{z'}^+$  et  $\xi_{z'}^-$  sont les deux racines du polynôme  $Q_{z'}$ .

$$\xi_{z'}^\pm = \frac{\xi_p}{2|\xi_p|^2} \left[ |\xi_p|^2 + r_{z'}^2 + h^2 \pm \sqrt{[(|\xi_p| + r_{z'})^2 + h^2][( |\xi_p| - r_{z'})^2 + h^2]} \right]$$

On démontre facilement que  $|\xi_{z'}^+| \geq r_{z'}$  et  $|\xi_{z'}^-| \leq r_{z'}$  et que  $h = 0$  est à la fois le seul minimum de  $|\xi_{z'}^+|$  et le seul maximum de  $|\xi_{z'}^-|$ . De même, on montre que pour une telle

valeur de  $h$ , on a  $\xi_{z'}^+ = \xi_{z'}^- = \xi_p$ .

L'algorithme proposé dans [12] provient de cette constatation. Disposant de  $u_1$ , on peut donc déterminer  $u^2$  sur  $T_{z'}$  pour  $0 < z' < 1$ . De plus, grâce à une approximation méromorphe<sup>4</sup> de  $u_{|T_{z'}}^2$ , il est possible d'estimer les pôles de cette fonction. En découpant la sphère  $S_1$  en tranches  $z' = -1, \dots, 1$ , il est possible en observant l'évolution des pôles et de leurs normes de retrouver  $z_p$  et en même temps  $\mathbf{p}_1$ . On peut ensuite facilement en déduire  $\mathbf{q}_1$ .

Cette méthode permet de retrouver un nombre fini de sources dipolaires en 2D mais reste limitée, pour le moment, à un dipôle ou à un monopôle en 3D. Pour des sources plus nombreuses, le dénominateur de  $u^2$  contient une ou plusieurs racines carrées et l'approche exposée ne fonctionne plus.

## 5.4 Méthodes distribuées

Dans ces méthodes, on considère une distribution de dipôles d'emplacements déterminés dont seules les moments doivent être estimées. De la même manière que pour les méthodes dipolaires, chaque dipôle peut être décomposé en trois dipôles élémentaires formant une base orthogonale. Ceci évite une non-linéarité qui serait due à des paramètres d'orientation du dipôle (des angles). Bien que certaines approches peuplent le volume de la tête d'une telle manière et cherchent à estimer les amplitudes de tous ces dipôles élémentaires, la plupart des approches distribuées se contentent d'une distribution de dipôles, chacun étant situé sur un noeud d'une triangulation du cortex avec pour direction fixée la normale au cortex à l'emplacement du dipôle. Cette restriction est due à la modélisation de l'activité des cellules pyramidales dans les colonnes corticales (cf 4.1 et Fig.4.1). Dans ce cas, l'amplitude de la distribution de dipôles forme une image définie sur la surface du cortex que l'on souhaite estimer. C'est la raison pour laquelle les méthodes distribuées sont souvent appelées méthodes image ou méthodes d'*imaging*. Dans tous les cas, le problème inverse est linéaire de type  $\mathbf{M} = \mathbf{A}\mathbf{S}^T$ .

Contrairement aux méthodes inverses précédentes, les approches d'*imaging* sont très fortement sous-contraintes. La modélisation géométrique précise des circonvolutions du cortex nécessite des maillages d'une grande taille. Le nombre d'inconnues (typiquement de l'ordre de  $10^4 \sim 10^5$ ) pour un instant donné est très largement inférieur au nombre de mesures (typiquement de l'ordre de  $10^2$ ) pour ce même instant. Il est donc nécessaire de contraindre le type de sources que l'on cherche à reconstruire<sup>5</sup>. Ces contraintes additionnelles sont introduites dans un cadre Bayésien dans la section qui suit.

### 5.4.1 Formulation bayésienne du problème inverse

On rappelle que  $\mathbf{M}$  désigne la matrice des mesures, chaque ligne décrivant le décours temporel d'un capteur et chaque colonne regroupant l'ensemble des mesures à un instant donné.  $\mathbf{S}$  est la matrice des amplitudes des sources. L'arrangement des lignes et des colonnes y est inversé : une ligne représente l'amplitude des sources sur tout le cortex à un instant donné et une colonne décrit le décours temporel de l'intensité d'un dipôle sur le

<sup>4</sup>par une fraction rationnelle complexe

<sup>5</sup>on parle en fonction du contexte de régularisation pour "stabiliser" le problème inverse ou d'*a priori* sur la solution

cortex.  $\mathbf{A}$  est la matrice de gain<sup>6</sup> liant  $\mathbf{M}$  et  $\mathbf{S}$  de telle sorte que  $\mathbf{M} = \mathbf{A} \mathbf{S}^\top$ .

En considérant les distributions de probabilités sur  $\mathbf{S}$  et sur  $\mathbf{M}$ , la formule de Bayes donne

$$p(\mathbf{S}|\mathbf{M}) = \frac{p(\mathbf{M}|\mathbf{S})p(\mathbf{S})}{p(\mathbf{M})}. \quad (5.11)$$

$p(\mathbf{M}|\mathbf{S})$  désigne la probabilité des mesures sachant la source  $\mathbf{S}$  et  $p(\mathbf{S})$  est une probabilité *a priori* que l'on se donne sur les sources. Dans ce modèle, toutes les mesures sont équiprobables. Dans ce cadre, le problème inverse est résolu par maximum de (log-)vraisemblance en maximisant la probabilité a posteriori  $p(\mathbf{S}|\mathbf{M})$ .

$$\hat{\mathbf{S}} = \underset{\mathbf{S}}{\operatorname{argmax}} p(\mathbf{M}|\mathbf{S})p(\mathbf{S}) = \underset{\mathbf{S}}{\operatorname{argmax}} \ln p(\mathbf{M}|\mathbf{S}) + \ln p(\mathbf{S}) \quad (5.12)$$

La probabilité  $p(\mathbf{M}|\mathbf{S})$  est donnée à l'aide du problème direct et d'une modélisation du bruit de mesure. En supposant un bruit gaussien blanc en temps et en espace, la log-vraisemblance est donnée par :

$$\ln p(\mathbf{M}|\mathbf{S}) = -\frac{1}{2\sigma^2} \|\mathbf{M} - \mathbf{A} \mathbf{S}^\top\|_{\mathbb{F}}^2$$

La probabilité *a priori*  $p(\mathbf{S})$  décrit des caractéristiques de la source que l'on s'attend à reconstruire. Nous supposons qu'elle peut se mettre sous la forme d'une loi exponentielle. Cette forme englobe les distributions gaussiennes et les distributions de Gibbs (c'est-à-dire les champs de Markov).

$$p(\mathbf{S}) = \frac{1}{\zeta} \exp(-\beta f(\mathbf{S}))$$

La maximisation de (5.12) peut alors être traitée via la minimisation de la quantité

$$U(\mathbf{S}) = \|\mathbf{M} - \mathbf{A} \mathbf{S}^\top\|_{\mathbb{F}}^2 + \lambda f(\mathbf{S}) \quad (5.13)$$

avec  $\lambda = 2\sigma^2\beta$ . Ce nombre est un coefficient indiquant la confiance relative que l'on accorde à l'*a priori* par rapport à celle accordée aux données. Plus la variance  $\sigma$  du bruit sur les données est grande, moins elles sont fiables et plus on fait confiance (relativement) à l'*a priori* (c'est-à-dire  $\lambda$  est plus grand). Plus  $\beta$  est grand, plus on exige que l'*a priori* soit respecté et plus  $\lambda$  est grand.

Le problème inverse en imaging sous sa formulation Bayésienne se ramène donc au problème élémentaire de la minimisation de l'énergie  $U(\mathbf{S})$  (5.13). Nous décrivons dans ce qui suit les méthodes existantes dans ce cadre, d'une part les méthodes linéaires et d'autre part les méthodes non-linéaires.

## 5.4.2 Méthodes image linéaires

Dans le cadre linéaire, on suppose que la distribution a priori de chaque image est gaussienne, centrée, de matrice de covariance  $C_S$ . On suppose, de plus, que la distribution des images est indépendante d'un instant au suivant. Ces deux approximations (notamment la seconde) peuvent paraître grossières mais dans ce cas

$$f(\mathbf{S}) = \operatorname{trace}(\mathbf{S} C_S^{-1} \mathbf{S}^\top)$$

<sup>6</sup>renfermant, pour rappel, toute référence au problème direct



et l'énergie  $U(s)$  est quadratique par rapport à  $\mathbf{S}$  car la somme de deux fonctions quadratiques. Son minimum est donné par la formule analytique

$$\hat{\mathbf{S}}^T = \mathbf{W}\mathbf{W}^T\mathbf{A}^T(\mathbf{A}\mathbf{W}\mathbf{W}^T\mathbf{A}^T + \lambda\mathbf{I})^{-1}\mathbf{M} = \mathbf{F}_\lambda\mathbf{M}. \quad (5.14)$$

Dans cette expression, on factorise  $C_S^{-1}$  en  $C_S^{-1} = \mathbf{W}\mathbf{W}^T$  de telle sorte que, pour une image, on ait  $\mathbf{s}, \mathbf{s}^t C_S^{-1} \mathbf{s} = \|\mathbf{W}\mathbf{s}\|_2^2$ .

Sous cette forme, (5.13) peut être vue comme une forme régularisée du problème inverse,  $f(\mathbf{S})$  étant la régularisation de Tikhonov et  $\lambda$  le paramètre de régularisation. C'est sous cette interprétation qu'un certain nombre de propositions ont été faites pour  $\mathbf{W}$ . Nous discernons notamment quatre types *a priori* :

- L'approche la plus ancienne qui utilise  $\mathbf{W} = \mathbf{I}$  et calcule la solution de norme minimale[91].
- Une approche de normalisation des colonnes de la matrice de gain où  $\mathbf{W}$  est une matrice diagonale contenant les normes de chaque colonne correspondante de la matrice de gain  $\mathbf{A}$  [63]. Cela pondère, dans la norme de l'image, la norme de chaque dipôle par la norme de son forward field.
- Plusieurs travaux où  $\mathbf{W}$  produit une dérivation spatiale d'ordre un [118] ou d'ordre deux [94] de l'image.
- Une dernière catégorie, enfin, pondère dans la norme de l'image, la norme de chaque dipôle par la puissance de la part du signal qu'il explique. Le calcul de cette pondération peut être effectué à l'aide d'une méthode de type beamformer ou MUSIC [28, 50, 27]

Le caractère sous-contraint du problème inverse image donne une faible résolution spatiale aux méthodes linéaires. Ces techniques tendent à produire un effet de flou qui éparpille l'activité des sources. Elles sont donc inadaptées à une évaluation précise de l'étendue des sources. Pour s'affranchir de cette limitation, il faut avoir recours à des méthodes non linéaires généralement beaucoup plus coûteuses en temps de calcul.

### 5.4.3 Méthodes image non-linéaires

Ces techniques s'affranchissent de l'hypothèse gaussienne formulée pour les méthodes linéaires. La fonction  $f$  n'est alors plus quadratique et dans la plupart des cas, aucune formule analytique comparable à (5.14) n'est disponible pour calculer la valeur  $\hat{\mathbf{S}}$  minimisant  $U(\mathbf{S})$ .

Une grande partie des travaux menés sur les méthodes non linéaires a porté sur des métriques à base d'entropie et sur les normes  $\mathbf{L}_p$  pour  $p < 2$ . En effet, plus  $p$  est petit, plus la solution est éparse. Pour le cas  $p = 1$ , la minimisation peut être mise sous la forme d'un problème de programmation linéaire [79]. Les propriétés de la programmation dynamique permettent de montrer qu'il existe une solution à ce problème ayant un nombre de pixels non nul ne dépassant pas le nombre de contraintes. Le nombre de dipôles actifs ne dépasse alors pas le nombre de mesures.

Une autre approche, issue du traitement d'image [74], a été appliquée à la régularisation du problème inverse. Elle est bâtie autour des champs markoviens<sup>7</sup>(MRF). Dans ce contexte, la distribution des valeurs d'un pixel, connaissant les valeurs des pixels de tout le reste de l'image, est égale à la distribution des valeurs de ce pixel connaissant la valeur

---

<sup>7</sup>Markov Random Fields



des pixels dans un voisinage. La fonction  $f(\mathbf{S})$  correspondante se met sous la forme

$$f(\mathbf{S}) = \sum_{j=1}^J \phi_j(\mathbf{S}) \quad (5.15)$$

et permet de contrôler de manière explicite la dépendance statistique entre les pixels de l'image d'activation  $\mathbf{S}$ . Dans (5.15), l'indice  $j$  désigne les numéros de clique, une clique étant un ensemble de pixels tous voisins les uns des autres. Le modèle le plus simple de MRF utilisé en traitement d'image fait intervenir des cliques de deux pixels voisins. La fonction de coût  $\phi_j$  associée est le carré de la différence des valeurs de ces pixels.

En MEEG, on veut pouvoir imposer à l'image reconstruite d'être composée d'un nombre restreint de sources focales. Cela se justifie par l'idée que lors d'une expérience MEEG, seules certaines zones du cerveau sont plus spécifiquement sollicitées. Pour modéliser cet *a priori* à l'aide de MRFs, deux approches ont été adoptées. La première [8] est basée sur des fonctions  $\phi_j$  non convexes définies sur des paires de pixels voisins. Une seconde approche [96], utilisant des champs de Markov binaires (le dipôle correspondant au pixel étant soit "allumé" soit "éteint") permet d'ajuster, au travers de paramètres, le niveau de focalisation et le niveau d'agrégation désirés.

Ces méthodes reposant sur des MRF mènent à des problèmes d'optimisation non convexe (pour la première approche) ou de programmation entière (pour la seconde) de grande taille. Elles sont par conséquent, les plus coûteuses en terme de temps de calcul parmi les méthodes inverses.

## 5.5 Méthodes hybrides

Les méthodes imaging sont finalement très peu restrictives sur les sources à reconstruire, au prix d'une sous-contrainte compensée par des *a priori*. Ces *a priori* ne reposent bien souvent pas sur les données et de nombreuses images plausibles peuvent être reconstruites en utilisant des *a priori* différents. Les méthodes paramétriques, inversement, posent de fortes contraintes sur les sources en terme de nombre et d'étendue notamment. Face à ces capacités complémentaires, on voit apparaître certains travaux visant à la mise au point de méthodes hybrides essayant d'allier ces deux types de méthodes et d'en fusionner les avantages.

On peut notamment citer [10] dans lequel les auteurs utilisent une méthode paramétrique pour initialiser un processus d'accroissement de zones actives estimées par une méthode d'imaging locale.

Dans la suite de cette partie, nous présentons nos travaux sur le problème inverse en MEEG. Ces derniers se placent dans la catégorie des méthodes d'imaging au croisement des techniques basées sur des normes  $L^p$  notamment  $L^1$  et les techniques issues du domaine du traitement d'image.

En guise de préambule et afin de situer nos travaux, nous dressons quelques comparaisons entre notre approche, LORETA dans sa version originale [94] et l'approche MRF par Champs Markovien proposée par Baillet et al. dans [8].

Ces trois techniques diffèrent tout d'abord sur la nature des reconstructions qu'elles effectuent. LORETA est une méthode de tomographie à basse résolution. Elle produit une image volumique de basse résolution de la distribution de courant dans la tête. L'approche MRF, quant à elle, procède à une reconstruction de sources surfaciques distribuées

sur des petites surfaces planes, tangentes à la surface du cortex et placées à différents endroits a priori. La localisation de ces endroits peut faire l'objet d'une automatisation. Une évolution de l'algorithme a permis son adaptation à des sources localisées sur une triangulation de la surface du cortex[11]. Notre approche, enfin, reconstruit une source distribuée sur toute la surface du cortex en utilisant la métrique associée à cette dernière. Un second point de divergence fondamentale de ces trois méthodes est la nature de l'a priori utilisé pour régulariser le problème inverse. LORETA calcul la source de Laplacien 3D minimal. L'approche MRF utilise des techniques de reconstruction d'image dans un cadre bayésien utilisant les champs de Markov. Ces techniques sont utilisées sur les surfaces planes évoquées plus haut. Dans notre approche nous utilisons le pendant variationnel de ces techniques basé sur des processus de diffusion que nous adaptons à la géométrie non plane du cortex.

Notre approche ne tire pas encore profit de l'aspect temporel des données contrairement aux deux autres.

Nous commençons l'exposé de nos travaux par un rappel sur certaines techniques de traitement d'image dont nous aurons besoin par la suite.

---

## Chapitre 6

# Régularisation d'image par diffusion et minimisation d'énergie

Le débruitage d'image est une tâche qui a suscité beaucoup d'intérêt dans le domaine du traitement d'image. Il existe une vaste classe d'algorithmes pour remplir cette tâche qui modélisent des processus de diffusions à l'aide d'EDPs. L'ensemble de ce chapitre est un résumé de certaines informations qui sont exposées de manière plus détaillée dans le livre de Aubert et Kornprobst [7]. La diffusion est un phénomène physique. Le premier processus de diffusion à avoir été étudié, puis appliqué en traitement d'image, provient de l'équation de la chaleur. On peut alors considérer une image comme une carte de températures dans un milieu homogène. L'équation de la chaleur modélise alors le phénomène de diffusion tendant à mener l'image à un l'équilibre thermodynamique où la température est constante sur l'image. On considère une image  $I_0$

$$I_0 : \begin{cases} [0, 1]^2 & \longrightarrow \mathbb{R} \\ \mathbf{x} & \longrightarrow I_0(\mathbf{x}) \end{cases} .$$

Faire évoluer l'équation de la chaleur sur l'image  $I$  s'écrit :

$$\begin{cases} \frac{\partial I}{\partial t}(t, \mathbf{x}) &= \Delta I(t, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \\ I(0, \mathbf{x}) &= I_0(\mathbf{x}) \end{cases} .$$

La fonction  $I(\mathbf{x}, t)$  est l'évolution de l'image initiale  $I_0(\mathbf{x})$ . On peut observer le résultat de cette évolution à un instant fini en bas à gauche de la figure 6.2. Cette équation a été très étudiée dans la littérature et on sait notamment que son évolution est équivalente à la convolution par un noyau gaussien. C'est-à-dire que l'on a

$$I(t, \mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^2} G_{\sqrt{2t}}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) I_0(\mathbf{y}) d\mathbf{y} = (G_{\sqrt{2t}} * I_0)(\mathbf{x}) \quad (6.1)$$

où  $G$  est le noyau gaussien

$$G_\sigma(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{|\mathbf{x}|^2}{2\sigma^2}\right) .$$

Cela correspond à un filtrage passe-bas. C'est-à-dire que l'équation de la chaleur va éliminer de l'image les hautes fréquences spatiales, domaine de fréquences où le bruit est effectivement le plus ressenti. Si l'on se place dans le domaine des fréquences et que l'on

écrit la transformée de Fourier de (6.1), on a

$$\begin{aligned} F[I(\cdot, t)](\omega) &= F[(G_{\sqrt{2t}} * I_0)(\cdot)](\omega) \\ &= F[G_{\sqrt{2t}}(\cdot)](\omega) F[I_0(\cdot)](\omega) \\ &= \exp(-t|\omega|^2) F[I_0(\cdot)](\omega). \end{aligned}$$

La convolution est donc un filtre passe-bas de plus en plus étroit quand  $t$  augmente. Il bloque les fréquences uniquement en fonction de leur norme et donc de manière isotrope dans l'espace. Il s'en suit un effet de flou sur l'image détruisant progressivement, au cours de l'évolution, tout contour ou toute structure dans l'image.

Pour pallier à ces inconvénients, la plupart des approches en débruitage d'image par des EDPs de diffusion ont ensuite tenté de préserver les contours et les structures en adaptant la diffusion de manière locale, en fonction de l'image.

L'équation de la chaleur est clairement l'équation d'Euler-Lagrange associée à l'énergie  $J_{heat}(I) = \int_{[0,1]^2} |\nabla I(\mathbf{x})|^2 dx$ .

Nous présentons ici une famille de processus de diffusion s'écrivant comme la minimisation d'une énergie de la forme

$$J_{smooth} = \int_{[0,1]^2} \phi(|\nabla I(\mathbf{x})|) dx \quad (6.2)$$

dont l'équation de la chaleur est un cas particulier avec  $\phi(x) = x^2$ .

L'équation d'Euler-Lagrange associée à la minimisation de  $J_{smooth}$  est

$$\begin{cases} \frac{\partial I}{\partial t}(t, \mathbf{x}) &= \nabla \cdot \left( \phi'(|\nabla I(t, \mathbf{x})|) \frac{\nabla I(t, \mathbf{x})}{|\nabla I(t, \mathbf{x})|} \right), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \\ I(0, \mathbf{x}) &= I_0(\mathbf{x}) \end{cases} \quad (6.3)$$

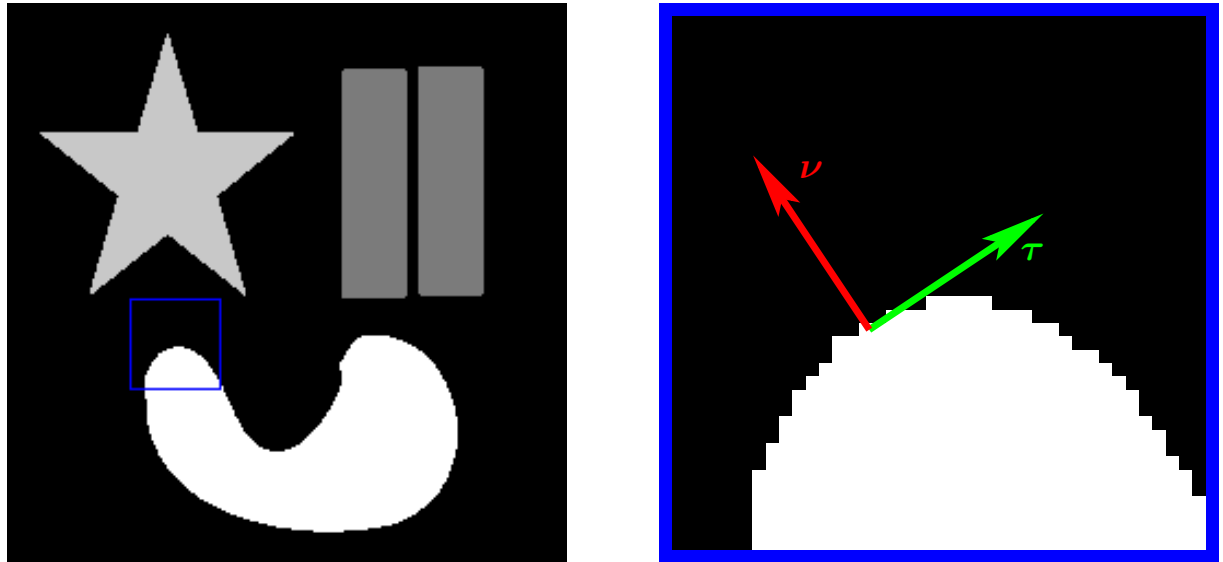


FIG. 6.1 – Diffusion

On note  $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ , les coordonnées de  $\mathbf{x}$ . On définit le vecteur  $\nu(\mathbf{x}) = \frac{\nabla I}{|\nabla I|}$  et  $\tau(\mathbf{x})$  un vecteur unitaire orthogonal à  $\nu$  qui représente la direction tangente à l'isophote<sup>1</sup>

<sup>1</sup>ligne de constante intensité lumineuse

passant par le point courant (cf. figure 6.1).

En explicitant  $\nabla$  en coordonnées cartésiennes  $\nabla = (\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2})^T$ , l'équation (6.3) se réécrit :

$$\frac{\partial I}{\partial t}(t, \mathbf{x}) = \frac{\phi'(|\nabla I(t, \mathbf{x})|)}{|\nabla I(t, \mathbf{x})|} I_{\nu\nu} + \phi''(|\nabla I(t, \mathbf{x})|) I_{\tau\tau} \quad (6.4)$$

où  $I_{\nu\nu}$  et  $I_{\tau\tau}$  désignent les dérivées secondes de  $I$  suivant les directions  $\nu$  et  $\tau$  et s'écrivent :

$$I_{\tau\tau} = \tau^T (\nabla^2 I) \tau = \frac{1}{|\nabla I|} (I_{x_1}^2 I_{x_2 x_2} + I_{x_2}^2 I_{x_1 x_1} - 2 I_{x_1} I_{x_2} I_{x_1 x_2}),$$

$$I_{\nu\nu} = \nu^T (\nabla^2 I) \nu = \frac{1}{|\nabla I|} (I_{x_1}^2 I_{x_1 x_1} + I_{x_2}^2 I_{x_2 x_2} + 2 I_{x_1} I_{x_2} I_{x_1 x_2}).$$

La forme 6.4 de notre équation de diffusion est essentielle car elle permet de comprendre le comportement diffusif dans chacune de ces directions. Cela permet également de déterminer comment choisir au mieux la fonction  $\phi$  de sorte à conserver les contours et les structures :

- aux endroits de l'image où le gradient est faible, on souhaite que la diffusion soit identique dans toutes les directions. En supposant la fonction  $\phi$  suffisamment régulière, cette propriété d'isotropie se traduit par la condition

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{\phi'(s)}{s} = \lim_{s \rightarrow 0^+} \phi''(s) = \phi''(0). \quad (6.5)$$

Cette condition implique notamment que  $\phi'(0) = 0$ .

- Au voisinage des contours, l'image présente un fort gradient et pour préserver ce contour, il est souhaitable de diffuser uniquement le long de l'isophote<sup>2</sup>. Pour cela, on fait en sorte que la composante suivant  $\nu$  s'annule pour les forts gradient mais pas celle suivant  $\tau$ . Sur la fonction  $\phi$ , cela se traduit par

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} \phi''(s) = 0, \quad \text{et}, \quad \lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{\phi'(s)}{s} = \beta > 0.$$

Hélas, aucune fonction  $\phi$  ne peut remplir les deux conditions précédentes simultanément car la seconde implique  $\lim_{s \rightarrow +\infty} \phi''(s) = \beta \neq 0$ .

On remplace donc, en général, ces deux conditions par les deux suivantes qui garantissent la condition d'anisotropie mais pour lesquelles l'intensité du lissage décroît lorsque l'intensité gradient augmente.

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} \phi''(s) = \lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{\phi'(s)}{s} = 0, \quad \text{et}, \quad \lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{\phi''(s)}{\phi'(s)/s} = 0 \quad (6.6)$$

Il existe de nombreuses fonctions  $\phi$  qui vérifient les conditions (6.5) et (6.6). Nous référençons dans le tableau suivant certaines fonctions proposées par différents auteurs.

Author	$\phi(s)$	$\phi'(s)/s$	$\phi''(s)$
Tikhonov	$\frac{s^2}{2}$	1	1
Rudin[100]	$s$	$\frac{1}{s}$	0
Perona-Malik[95]	$-\frac{k^2}{2}(e^{-(s/k)^2}-1)$	$e^{-(s/k)^2}$	$\frac{(1-2\frac{s^2}{k^2})}{e^{(s/k)^2}}$
Aubert[21]	$\sqrt{1 + (s/k)^2} - 1$	$\frac{1}{\sqrt{k^2+s^2}} k^{-2}$	$\frac{ k }{(k^2+s^2)^{3/2}}$

(6.7)

<sup>2</sup>ligne de niveau de gris constant

Dans ce tableau,  $k$  symbolise un paramètre réel positif qui, pour la fonction de Perona et Malik, doit vérifier  $s^2 \leq k^2/2$ .

En traitement d'image l'utilisation de ces processus de diffusion est adjointe à un terme d'attache aux données que l'on ajoute à l'énergie  $J_{\text{smooth}}$ . Le problème de débruitage de l'image s'écrit alors

$$I_\lambda = \min_I J(I) \quad (6.8)$$

avec

$$J(I) = J_{\text{data}} + \lambda J_{\text{smooth}}$$

et

$$J_{\text{data}} = \frac{1}{2} \|L I - I_0\|^2$$

où  $L$  désigne une déformation considérée linéaire due au dispositif d'acquisition de l'image. Ce terme d'attache aux données permet de garantir que l'image reconstruite sera plus ou moins proche de l'image initiale suivant la valeur de  $\lambda$ . Sans cela, le minimum de  $J_{\text{smooth}}$  est toujours une image d'un niveau de gris constant.

On montre sur la figure 6.2, un débruitage d'image à l'aide de deux des méthodes exposées ci-dessus. La fonction de Tikhonov, induit une restauration par diffusion isotrope qui filtre efficacement le bruit mais en émoussant fortement les contours. Pour la fonction de Rudin,  $J_{\text{smooth}}$  est la variation totale de l'image et la diffusion utilisée est purement anisotrope et n'agit que dans la direction tangentielle aux isophotes. Le résultat est bien meilleur pour l'image présentée car, en plus de supprimer le bruit, ce lissage préserve également parfaitement les contours des objets.

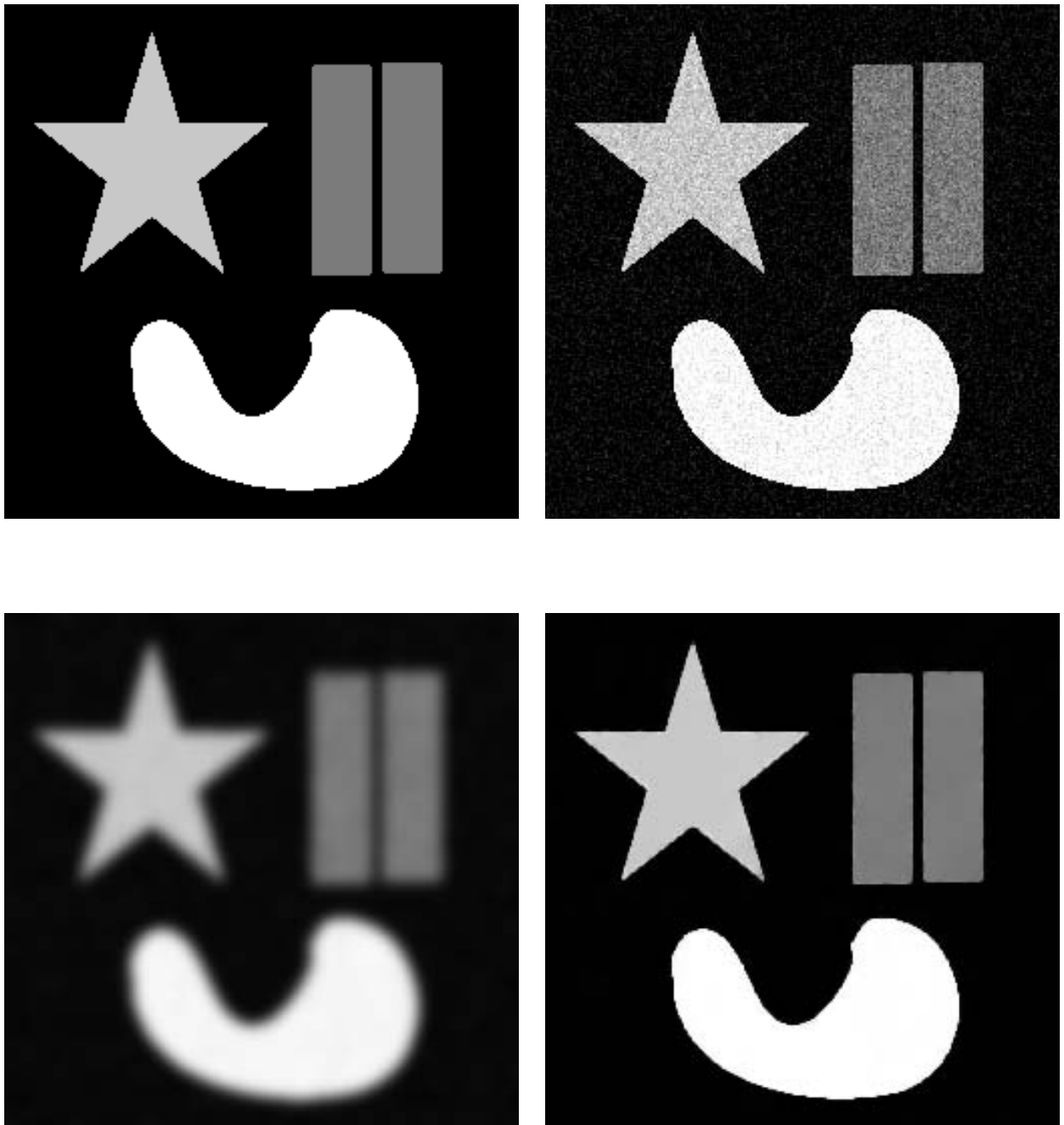


FIG. 6.2 – Exemple de diffusions. En haut à gauche, l'image originale. En haut à droite, l'image bruitée. En bas à gauche, le débruitage par gaussienne, en bas à droite le débruitage par variation totale (fonction de Rudin).

La similarité des équations (5.13) et (6.8) laisse supposer que la classe de techniques de reconstruction que nous venons de présenter peut se transposer au problème inverse imaging en MEEG. C'est l'objet de la fin de cette partie. Cela passe par la prise en compte de deux différences majeures :

- Contrairement au cas du traitement d'image, l'opérateur de formation des images  $L$  n'associe pas à l'image  $I$  une image de taille identique. Pour le problème inverse, l'image observée contient beaucoup moins de pixels que l'image originale et de plus, la valeur d'un pixel de l'image observée ne dépend pas d'un ensemble restreint de pixels de l'image originale mais de l'image entière. A titre de comparaison, transposer le problème inverse MEEG au traitement d'image reviendrait à vouloir reconstruire une image en connaissant la somme des intensités de chacune de ses lignes et de chacune de ses colonnes. C'est notamment cette inter-dépendance complète entre tous les pixels de l'activité reconstruite à travers le terme d'attache aux données qui limite pour des raisons combinatoires les possibilités pratiques d'inférence Bayésienne.
- Si la distribution de dipôles de courant que l'on cherche à reconstruire lors du problème inverse en MEEG peut effectivement être vue comme une image à valeurs réelles, à la différence de ce que nous venons d'exposer, le support de cette image n'est pas plan. L'implémentation des équations de minimisation de l'énergie  $J$  et notamment de son terme diffusif  $J_{\text{smooth}}$  ne peut plus être implémentée à l'aide des schémas aux différences finis utilisés en traitement d'image.



---

## Chapitre 7

# Problème inverse régularisé par processus de diffusion

Nous exposons dans ce chapitre, sous une forme unifiée, les travaux publiés aux conférences NFSI 2003 [3] et NFSI 2005[2].

Dans ce chapitre, nous résolvons le problème inverse en MEEG dans le cadre des méthodes d'*imaging*.

Comme cela a été détaillé dans la section 5.4.1, la résolution de ce problème dans un cadre Bayésien est équivalente à la minimisation d'une énergie  $J(s)$  s'écrivant comme la somme de deux termes :

$$J(s) = J_{\text{data}}(s) + \lambda J_{\text{smooth}}(s) \quad (7.1)$$

avec

$$J_{\text{data}}(s) = \frac{1}{2} \|Hs - \underline{\mathbf{m}}\|^2 \quad \text{et} \quad J_{\text{smooth}}(s) = \int_S \phi(|\nabla_S s(\mathbf{x})|) dS(\mathbf{x}).$$

Nous nous plaçons dans le cadre de la reconstruction d'une image source à un instant donné de telle sorte que  $\underline{\mathbf{m}}$  représente l'ensemble des données des capteurs MEG/EEG à cet instant et  $s$  désigne une fonction à variation bornée définie sur  $S$ , la surface du cortex. Cette fonction représente l'intensité d'une distribution surfacique de courant dipolaire normale à la surface  $S$  à l'instant considéré.  $H$  désigne l'opérateur de gain qui à une distribution source donnée associe les mesures MEG/EEG associées. L'opérateur  $H$  ayant été l'objet de l'intégralité du chapitre 2, nous faisons l'abus de langage de confondre l'opérateur  $H$  et la matrice issue de sa discrétisation, la précision étant donnée lorsque le contexte n'est pas suffisamment clair.

$J_{\text{data}}$  est le terme d'attache aux données garantissant que l'image source reconstruite génère bien les mêmes mesures MEG/EEG que celles effectivement observées.  $J_{\text{smooth}}$  est un terme de régularisation de l'image  $s$  issu du chapitre précédent mais adapté à la surface  $S$  non plane.  $\lambda$ , enfin, est le "paramètre de lissage" permettant d'ajuster le poids relatif de ces deux termes. Pour rappel, dans le cadre bayésien, ce paramètre indique la confiance accordée à l'a priori.

L'image source du problème inverse  $s$  étant une image non plane, nous exposons dans un premier temps les adaptations effectuées sur le terme de régularisation évoqué dans le chapitre précédent. Nous revenons ensuite sur le problème de minimisation à résoudre puis sur les différentes approches adoptées pour implémenter la résolution. Nous terminons enfin sur une partie expérimentale visant à comparer ces différentes approches entre elles et à les valider.

## 7.1 Notions de calcul différentiel intrinsèque

Dans tout le chapitre précédent, nous avons considéré des images planes, c'est-à-dire des fonctions à variation bornée de  $[0, 1]^2$  dans  $\mathbb{R}$ . Dans le cas du problème inverse, l'image source est une fonction à variation bornée de  $S$  dans  $\mathbb{R}$  où  $S$  est la surface du cortex. Il faut donc généraliser les notions de gradient et de divergence utilisées dans le chapitre précédent aux fonctions définies sur une surface. Pour ce faire, on suppose que  $S$  est une variété différentiable  $C^2$  bornée et que  $s$  est continûment dérivable sur  $S$ . On note  $\Omega$  l'intérieur de l'ensemble dont  $S$  est la frontière de telle sorte que  $\bar{\Omega}$  est un compact de  $\mathbb{R}^3$ .

Nous introduisons dans ce qui suit la notion de *gradient surfacique* et de *divergence surfacique* en suivant [33] sans en reprendre les démonstrations. D'autres détails de géométrie intrinsèque peuvent être trouvés dans [34]. L'approche intrinsèque de ces définitions évite l'introduction de bases et de coordonnées locales et en allège ainsi considérablement l'exposé.

La notion de gradient d'une fonction réelle de  $\mathbb{R}^n$  s'étend aisément à une fonction d'une variété différentiable, ici  $S$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}$ . A cette fin nous introduisons les notations suivantes :  $d$  désigne la fonction distance signée à  $S$  négative dans  $\Omega$ ,  $\Gamma_\gamma(S)$  est le voisinage tubulaire de rayon  $\gamma > 0$  autour de  $S$  c'est-à-dire  $\Gamma_\gamma(S) = \{x : |d(x)| < \gamma\}$ . On définit ensuite le projecteur  $p$  sur la surface  $S$

$$p : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ \mathbf{x} & \longrightarrow \mathbf{x} - d(\mathbf{x})\nabla d(\mathbf{x}) \end{cases}$$

et le projecteur  $P_{\mathbf{x}}$  sur le plan tangent à  $S$  en  $\mathbf{x}$

$$P_{\mathbf{x}} : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ \mathbf{r} & \longrightarrow \mathbf{r} - \nabla d(\mathbf{x})\nabla d(\mathbf{x})^T \mathbf{r} \end{cases}.$$

Muni de ces notations, un moyen classique de définir le *gradient surfacique*<sup>1</sup> est d'utiliser une extension régulière  $F$  de  $f$  dans un voisinage autour de  $S$ . On considère ensuite la composante du gradient de  $F$  dans le plan tangent à  $S$  en utilisant le fait que l'expression résultante est indépendante du choix de  $F$ .

Plus précisément, étant données une fonction  $f \in C^1(S)$  et  $F \in C^1(\Gamma_{2h}(S))$  une extension de  $f$ , on définit sur  $S$  la quantité

$$g(F) \equiv \nabla F|_S - \frac{\partial F}{\partial \mathbf{n}} \mathbf{n},$$

$\mathbf{n}$  étant la normale unitaire sortante de  $S$ . Il s'agit de la projection orthogonale  $P_{\mathbf{x}}\nabla F(\mathbf{x})$  du  $\nabla F(\mathbf{x})$  sur le plan tangent à  $S$  en  $\mathbf{x}$ .

Pour obtenir une quantité intrinsèque,  $g(F)$  doit être indépendante du choix de  $F$ .  $g$  étant un opérateur linéaire, il suffit de montrer que  $g(F) = 0$  seulement si  $F = 0$ . Or, dans ce cas,  $F = f = 0$  sur  $S$  et la composante tangentielle de  $\nabla F$  est nulle sur  $S$ . On a donc

$$\nabla F|_S = \frac{\partial F}{\partial \mathbf{n}} \mathbf{n} \Rightarrow g(F) = \nabla F|_S - \frac{\partial F}{\partial \mathbf{n}} \mathbf{n} = \mathbf{0}.$$

Ce qui justifie la définition suivante.

---

<sup>1</sup>ou *gradient tangentiel*

**Définition 1 (Gradient Surfaccique)** Soient  $S$  une variété différentielle  $C^2$  de codimension 1 et  $f$  une fonction de  $C^1(S)$ . On suppose qu'il existe  $h > 0$  tel que  $d \in C^2(\Gamma_{2h}(S))$  et l'on se donne une extension  $F \in C^1(\Gamma_{2h}(S))$  de  $f$ .  
Le gradient surfaccique de  $f$  en un point de  $S$  est donné par

$$\nabla_S f \equiv \nabla F|_S - \frac{\partial F}{\partial \mathbf{n}} \mathbf{n}. \quad (7.2)$$

Dans notre cas,  $\Omega$  étant supposé borné,  $S$  est compacte et l'existence d'un tel  $h$  est toujours assurée. Le théorème suivant fournit d'autres écritures équivalentes du gradient surfaccique.

**Théorème 3** Soient  $S$  une variété différentielle  $C^2$  de codimension 1 et  $f$  une fonction de  $C^1(S)$ . On suppose qu'il existe  $h > 0$  tel que  $d \in C^2(\Gamma_{2h}(S))$  et l'on se donne une extension  $F \in C^1(\Gamma_{2h}(S))$  de  $f$ . On a alors les deux propriétés suivantes :

- (i)  $\nabla_S f(\mathbf{x}) = (P_{\mathbf{x}} \nabla F)|_S(\mathbf{x})$  et  $n \cdot \nabla_S f(\mathbf{x}) = \nabla d(\mathbf{x}) \cdot \nabla_S f(\mathbf{x}) = 0$
- (ii)  $\nabla(f \circ p)|_S(\mathbf{x}) = \nabla_S f(\mathbf{x})$ .

On peut voir que le gradient surfaccique de  $f$  peut être calculé comme la projection sur le plan tangent du gradient de  $F$  et qu'une extension canonique est  $F = f \circ p$ . C'est précisément cette extension que l'on utilise pour définir la notion de divergence surfaccique.

**Définition 2 (Divergence Surfaccique)** Soient  $S$  une variété différentielle  $C^2$  de codimension 1 et  $\mathbf{v}$  une fonction vectorielle de  $C^1(S)^N$ .  
La divergence surfaccique de  $\mathbf{v}$  en un point de  $S$  est donnée par

$$\nabla_S \cdot \mathbf{v} \equiv \nabla \cdot (\mathbf{v} \circ p)|_S.$$

Ces considérations se montreront utiles, notamment lorsque nous aborderons les implémentations de  $J_{\text{smooth}}$ .

## 7.2 Approche par discrétisation du gradient

Pour l'implémentation du terme de régularisation issu de  $J_{\text{smooth}}$ , l'approche la plus directe consiste à discrétiser la quantité

$$\nabla \cdot \left( \phi'(|\nabla_S s(\mathbf{x})|) \frac{\nabla_S s(\mathbf{x})}{|\nabla_S s(\mathbf{x})|} \right)$$

qui n'est autre que le gradient de  $J_{\text{smooth}}$ , pendant de l'équation 6.3.

Pour simplifier les notations, nous posons  $\Psi(|\nabla_S s(\mathbf{x})|) = \frac{\phi'(|\nabla_S s(\mathbf{x})|)}{|\nabla_S s(\mathbf{x})|}$ , la quantité d'intérêt s'écrivant alors

$$\nabla J_{\text{smooth}}(s)(\mathbf{x}) = \nabla \cdot (\Psi(|\nabla_S s(\mathbf{x})|) \nabla_S s(\mathbf{x})).$$

Les premiers travaux dans ce sens ont été menés dans [57] dans le cas de l'équation de la chaleur ( $\Psi = I$ ). Pour le cas général ( $\Psi$  quelconque), nous suivons les travaux exposés

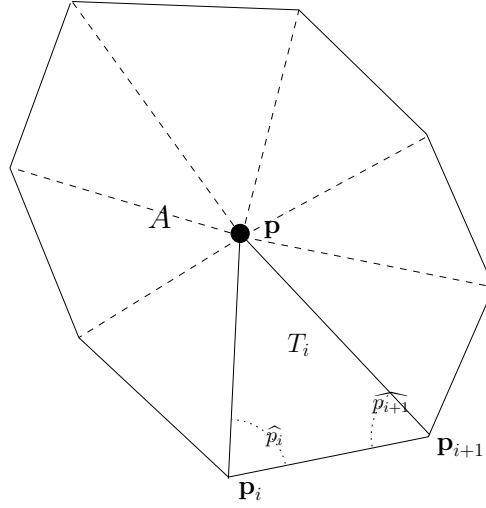


FIG. 7.1 – Calcul du gradient sur l'ensemble des triangles adjacents à un sommet.

dans [106] sur le flot de Beltrami sur des variétés différentielles et plus particulièrement son adaptation à des surfaces triangulées dans [75].

Suivant les idées introduites dans [82], on calcule une approximation de  $\nabla J_{\text{smooth}}$  à un sommet  $\mathbf{p}$  de  $S$  comme la moyenne de cette quantité sur tous les triangles adjacents à  $\mathbf{p}$  dans le maillage. On note  $A$  la réunion de ces triangles. Cette même lettre désignera également, par abus de notation, l'aire de la surface qu'elle désigne. On note  $\mathbf{p}_i$  les sommets formant la frontière de  $A$  de telle sorte que l'ensemble des triangles de  $A$  sont de la forme  $(\mathbf{p}, \mathbf{p}_i, \mathbf{p}_{i+1})$ . On a alors :

$$\nabla_S \cdot (\Psi(|\nabla_S s(\mathbf{p})|) \nabla_S s(\mathbf{p})) \approx \frac{1}{A} \int_A \nabla_S \cdot (\Psi(|\nabla_S s(\mathbf{x}')|) \nabla_S s(\mathbf{x}')) d\mathbf{x}'. \quad (7.3)$$

L'utilisation de la formule d'Ostrogradski mène à

$$\begin{aligned} \frac{1}{A} \int_A \nabla_S \cdot (\Psi(|\nabla_S s(\mathbf{x}')|) \nabla_S s(\mathbf{x}')) dS(\mathbf{x}') &= \frac{1}{A} \int_{\partial A} \Psi(|\nabla_S s(\mathbf{x}')|) \nabla_S s(\mathbf{x}') \cdot \mathbf{n}_{\partial A} dl(\mathbf{x}') \\ &= \frac{1}{A} \sum_{T_i \in A} \int_{\partial A \cap T_i} \Psi(|\nabla_S s(\mathbf{x}')|) \nabla_S s(\mathbf{x}') \cdot \mathbf{n}_{\partial A} dl(\mathbf{x}') \end{aligned}$$

En nommant  $\phi_1$ ,  $\phi_2$  et  $\phi_3$  les fonctions linéaires valant 1 respectivement en  $\mathbf{p}$ ,  $\mathbf{p}_i$  et  $\mathbf{p}_{i+1}$  et 0 aux autres sommets, on a pour tout  $\mathbf{x}$  de  $T_i$

$$\begin{aligned} \nabla_S s(\mathbf{x}) &= s(\mathbf{p}) \nabla_S \phi_1 + s(\mathbf{p}_i) \nabla_S \phi_2 + s(\mathbf{p}_{i+1}) \nabla_S \phi_3 \\ &= (s(\mathbf{p}_i) - s(\mathbf{p})) \nabla_S \phi_2 + (s(\mathbf{p}_{i+1}) - s(\mathbf{p})) \nabla_S \phi_3 \\ &= \frac{1}{2A_{T_i}} [(s(\mathbf{p}_i) - s(\mathbf{p})) (\mathbf{p} - \mathbf{p}_{i+1})^\perp + (s(\mathbf{p}_{i+1}) - s(\mathbf{p})) (\mathbf{p}_i - \mathbf{p})^\perp], \end{aligned} \quad (7.4)$$

$(\mathbf{p} - \mathbf{p}_{i+1})^\perp$  et  $(\mathbf{p}_i - \mathbf{p})^\perp$  désignant les vecteurs unitaires orthogonaux respectivement à  $(\mathbf{p} - \mathbf{p}_{i+1})$  et  $(\mathbf{p}_i - \mathbf{p})$  pointant respectivement vers  $\mathbf{p}_i$  et  $\mathbf{p}_{i+1}$ .

En tenant compte des relations suivantes

$$\begin{aligned} (\mathbf{p} - \mathbf{p}_{i+1})^\perp \cdot (\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_{i+1})^\perp &= (\mathbf{p} - \mathbf{p}_{i+1}) \cdot (\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_{i+1}) = |\mathbf{p} - \mathbf{p}_{i+1}| |\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_{i+1}| \cos(\widehat{p_{i+1}}) \\ (\mathbf{p}_i - \mathbf{p})^\perp \cdot (\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_{i+1})^\perp &= (\mathbf{p}_i - \mathbf{p}) \cdot (\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_{i+1}) = |\mathbf{p}_i - \mathbf{p}| |\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_{i+1}| \cos(\widehat{p_i}) \\ 2A_{T_i} &= |\mathbf{p}_i - \mathbf{p}| |\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_{i+1}| \sin(\widehat{p_i}) = |\mathbf{p} - \mathbf{p}_{i+1}| |\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_{i+1}| \sin(\widehat{p_{i+1}}), \end{aligned}$$

on peut écrire à l'aide de (7.4) pour  $\mathbf{x} \in T_i$

$$\nabla_S s(\mathbf{x}) \cdot [\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_{i+1}]^\perp = \cot(\widehat{p_{i+1}}) (s(\mathbf{p}_i) - s(\mathbf{p})) + \cot(\widehat{p_i}) (s(\mathbf{p}_{i+1}) - s(\mathbf{p})).$$

Les angles  $\widehat{p_i}$  et  $\widehat{p_{i+1}}$  sont représentés sur la figure 7.1. L'approximation écrite dans (7.3) peut dès lors se mettre sous la forme suivante

$$\nabla_S \cdot (\Psi(|\nabla_S s(\mathbf{p})|) \nabla_S s(\mathbf{p})) \approx \frac{1}{A} \sum_{T_i=(\mathbf{p}, \mathbf{p}_i, \mathbf{p}_{i+1}) \in A} \left\{ \Psi(|\nabla_S s(\mathbf{p})|) \left[ \cot(\widehat{p_{i+1}}) (s(\mathbf{p}_i) - s(\mathbf{p})) + \cot(\widehat{p_i}) (s(\mathbf{p}_{i+1}) - s(\mathbf{p})) \right] \right\} \quad (7.5)$$

où le terme  $\Psi(|\nabla_S s(\mathbf{p})|)$  est calculé à l'aide de l'égalité (7.4).

Une fois ce calcul effectué, le gradient de  $J$  est obtenu comme suit :

$$\nabla J = \nabla J_{\text{data}} + \lambda \nabla J_{\text{smooth}}$$

dans lequel  $\nabla J_{\text{smooth}}$  est obtenu grâce à (7.5) et  $\nabla J_{\text{data}}$  est donné par un calcul immédiat et vaut

$$\nabla J_{\text{data}}(s) = H^T (H \mathbf{s} - \underline{\mathbf{m}}) \quad (7.6)$$

La minimisation est alors effectuée par une méthode de gradient à pas fixe (Alg.2), ce qui revient à faire évoluer l'équation d'Euler-Lagrange associée à  $J$ .

---

**Algorithme 2** Gradient à pas fixe
 

---

Initialise  $\underline{\mathbf{s}}_0 = 0$  et  $n = 0$

**répéter**

$$\underline{\mathbf{s}}_{n+1} \leftarrow \underline{\mathbf{s}}_n - \mu \nabla J(\underline{\mathbf{s}}_n)$$

$$n \leftarrow n + 1$$

**jusqu'à**  $\|\underline{\mathbf{s}}_n - \underline{\mathbf{s}}_{n-1}\| < \text{seuil}$

---

La convergence de la descente de gradient vers le minimum global est garantie dès que  $x \rightarrow \phi(\sqrt{x})$  est une fonction  $C^2$  strictement convexe et croissante. C'est le cas pour l'ensemble des fonctions  $\phi$  envisagées dans le tableau (6.7), excepté pour la fonction de Rudin associée à la reconstruction de variation totale minimale. Dans ce cas,  $\nabla J_{\text{smooth}}$  n'est pas continu et même si l'algorithme semble tendre vers un minimum, la suite se met à osciller autour de ce point avec une amplitude proportionnelle au coefficient de régularisation  $\lambda$ . Un remède pour assurer la convergence consiste à baisser le pas  $\mu$  de l'algorithme 2. Cette solution est pénalisante en terme de temps de calcul. Une autre solution consisterait à décomposer l'algorithme de gradient en deux étapes l'une concernant  $J_{\text{data}}$ , l'autre  $J_{\text{smooth}}$ . Il serait alors possible d'abaisser le pas de la partie concernant  $J_{\text{smooth}}$  quitte à itérer cette étape afin de préserver le même poids au terme de lissage. Une telle démarche nous dirige vers un algorithme dans lequel l'étape de lissage est exécutée à chaque itération par un algorithme lui-même itératif. C'est ce que nous décrivons en 7.4.

Même dans les cas où l'algorithme 2 tend effectivement vers le minimum recherché, sa convergence est très lente et la discrétisation de la Hessienne exacte de  $J_{\text{smooth}}$  n'est pas aussi aisée que celle du gradient.

Pour remédier à ce problème, nous avons mis au point une technique de discrétisation alternative qui permet ce passage à l'ordre 2.

## 7.3 Approche par énergie discrétisée

Dans cette approche nous remplaçons  $J_{\text{smooth}}$  par une version discrétisée que nous notons  $\tilde{J}_{\text{smooth}}$ . Les calculs du gradient et de la Hessienne sont ensuite menés sur cette nouvelle énergie.

### 7.3.1 Discrétisation

On note respectivement  $n_T$  et  $n_V$  le nombre de triangles et le nombre de sommets du maillage de  $S$ . On désigne par  $(\phi_i^S)_{i=1\dots n_V}$  les éléments d'une base de fonctions P1 telle que  $\phi_i^S$  soit affine sur chaque triangle et vaut 1 au sommet  $i$  et 0 aux autres sommets. On note  $\underline{s} = (s_1, s_2, \dots, s_{n_V})^T$  le vecteur des coordonnées de la projection de  $s$  dans cette base. Dans chaque triangle  $T_j$  contenant le sommet  $i$ , on définit le vecteur  $\mathbf{a}_i^j$  et le réel  $b_i^j$  tel que  $(\phi_i^S)(x) = \mathbf{a}_i^j \cdot x + b_i^j$  et, pour simplifier l'écriture, on pose  $\mathbf{a}_i^j = 0$  et  $b_i^j = 0$  si le sommet  $i$  n'est pas dans le triangle  $j$  de telle sorte qu'on ait bien  $(\phi_i^S) = 0$  dans ce triangle.

La fonction  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}_i^j \cdot \mathbf{x} + b_i^j$  est ici définie sur  $S$  (plus précisément  $T_j$ ) dans  $\mathbb{R}$ . Cette fonction s'étend naturellement en une fonction  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^3$  en conservant la même définition. D'après le théorème 3, on a

$$\nabla_S(\mathbf{a}_i^j \cdot \mathbf{x} + b_i^j) = P_S \nabla(\mathbf{a}_i^j \cdot \mathbf{x} + b_i^j) = P_{T_j} \mathbf{a}_i^j = \mathbf{a}_i^j$$

où  $P_S$  et  $P_{T_j}$  désignent les projecteurs orthogonaux sur le plan tangent à  $S$  et  $T_j$ . La dernière égalité est due au fait que le vecteur  $\mathbf{a}_i^j$  est dans le plan de  $T_j$  car construit dans ce dernier (équation (7.4)).

En notant  $\mathbf{1}_j(\mathbf{x})$  la fonction indicatrice du triangle  $j$ , pour l'approximation P1 de  $s$ , on peut écrire la quantité  $J_{\text{smooth}}$  :

$$\begin{aligned} J_{\text{smooth}}(s) &= \int_S \phi(|\nabla_S s(\mathbf{x})|) dS(\mathbf{x}) \\ &\simeq \int_S \phi \left( \left| \nabla_S \sum_{i=1}^{n_V} s_i \sum_{j=1}^{n_T} \mathbf{1}_j(\mathbf{x}) (\mathbf{a}_i^j \cdot \mathbf{x} + b_i^j) \right| \right) dS(\mathbf{x}) \\ &= \int_S \phi \left( \left| \sum_{i=1}^{n_V} s_i \sum_{j=1}^{n_T} \mathbf{a}_i^j \mathbf{1}_j(\mathbf{x}) \right| \right) dS(\mathbf{x}) \\ &= \sum_{k=1}^{n_T} \int_{T_k} \phi \left( \left| \sum_{i=1}^{n_V} s_i \mathbf{a}_i^k \right| \right) dS(\mathbf{x}) \\ &= \sum_{k=1}^{n_T} \phi \left( \left| \sum_{i=1}^{n_V} s_i \mathbf{a}_i^k \right| \right) A_k \end{aligned} \tag{7.7}$$

On note  $\mathbf{Q}$  l'application linéaire liant le vecteur  $\mathbf{s}$  des coordonnées de  $s$  dans la base P1 à la valeur du gradient surfacique de  $s$  sur chacun des triangles (c'est-à-dire les coordonnées de ce gradient dans une base de fonctions P0 définies sur les triangles  $T_j$ ). En tenant

<sup>2</sup>pour des formes explicites de  $\mathbf{a}_i^j$  et  $b_i^j$ , se reporter à l'annexe B

compte des considérations précédentes,  $\mathbf{Q}$  s'écrit

$$\mathbf{Q} : \mathbb{R}^{n_V} \longrightarrow (\mathbb{R}^3)^{n_T}$$

$$\begin{bmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_{n_V} \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n_V} s_i \mathbf{a}_i^1 \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{n_V} s_i \mathbf{a}_i^{n_T} \end{bmatrix}.$$

Notons que la matrice  $\mathbf{Q}$  est très creuse car chaque ligne ne contient que 3 entrées non nulles correspondant chacune à une composante du gradient sur le triangle issue des fonctions  $P1$  associées à chacun des trois sommets de ce triangle.

Pour  $\underline{\mathbf{p}} = (\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_{n_T}) \in (\mathbb{R}^3)^{n_T}$ , on pose

$$\|\underline{\mathbf{p}}\|_{(\phi, A_i)} = \sum_{i=1}^{n_T} \phi(|\mathbf{p}_i|) A_i \quad \text{et} \quad [\underline{\mathbf{p}}]_i = \mathbf{p}_i$$

où  $|\cdot|$  désigne la norme euclidienne de  $\mathbb{R}^3$  de telle sorte que (7.7) se réécrit

$$J_{\text{smooth}}(s) \simeq \tilde{J}_{\text{smooth}}(\underline{\mathbf{s}}) = \|\mathbf{Q}\underline{\mathbf{s}}\|_{(\phi, A_i)}. \quad (7.8)$$

### 7.3.2 Minimisation

Cette discrétisation donne naissance à un problème de minimisation discret où la solution recherchée  $\mathbf{s}^*$  est donnée par :

$$\underline{\mathbf{s}}^* = \underset{\underline{\mathbf{s}} \in \mathbb{R}^{n_V}}{\operatorname{argmin}} \tilde{J}(\underline{\mathbf{s}}) \quad (7.9)$$

avec

$$\tilde{J}(\underline{\mathbf{s}}) = J_{\text{data}}(\underline{\mathbf{s}}) + \tilde{J}_{\text{smooth}}(\underline{\mathbf{s}})$$

Il est simple de montrer que  $\tilde{J}_{\text{smooth}}$  est une fonction convexe de  $\mathbf{s}$  pour l'ensemble des fonctions  $\phi$ . En effet, les  $\phi$  et  $|\cdot|$  étant convexe,  $\|\cdot\|_{(\phi, A_i)}$  est convexe et comme  $\mathbf{Q}$  est linéaire,  $J_{\text{smooth}}$  est la composée d'une fonction convexe et d'une application linéaire et est donc convexe.  $\tilde{J}_{\text{data}}$  étant convexe car quadratique,  $\tilde{J}$  est convexe et le problème (7.9) admet une unique solution.

Si l'on exclut le cas où  $\phi(x) = x$ , il est également très facile de montrer que  $\tilde{J}_{\text{smooth}}$  est  $C^2$  (et même  $C^\infty$ ). On se retrouve, dans ce cas, face à un problème canonique d'optimisation. De plus, le gradient et la Hessienne de la nouvelle fonctionnelle  $\tilde{J}_{\text{smooth}}$  possédant des formes analytiques simples calculées dans l'annexe C, l'algorithme de minimisation le plus rapide dans ce cas est l'algorithme de Newton itéré [16] (3). Sa convergence est assurée dans notre cas [16] sous réserve d'initialiser l'algorithme avec une position suffisamment proche du minimum recherché, ce que nous assurons par une courte descente de gradient préalable. On obtient ainsi une forte accélération de la convergence dans le cas où  $\phi(x) \neq |x|$ .

**Algorithme 3** Algorithme de NewtonInitialise  $\underline{s}_0 = 0$  et  $n = 0$ **répéter**calcule  $\underline{p}$  tel que  $Hess(J)(\underline{s}_n) \underline{p} = -\nabla(J)(\underline{s}_n)$  $\underline{s}_{n+1} \leftarrow \underline{s}_n + \underline{p}$  $n \leftarrow n + 1$ **jusqu'à**  $\|\underline{s}_{n+1} - \underline{s}_n\| < \text{seuil}$ 

Cette technique ne profite cependant pas au problème inverse de variation totale minimale ( $\phi(x) = x$ ). Dans ce cas, la fonction  $\tilde{J}_{\text{smooth}}$  (et donc  $\tilde{J}$ ) n'est que continue et dérivable presque partout. Les conditions sont insuffisantes pour l'application de l'algorithme 3 qui se met à diverger. Cela est dû au fait que l'approximation locale par une quadrique devient souvent inappropriée. Pour essayer de contourner cette limitation, nous avons tenté d'approcher la fonction  $\phi(x) = x$  par une suite de fonctions convexes choisies de telle sorte que  $\tilde{J}_{\text{smooth}}$  reste  $C^2$  et convexe au fur et à mesure de l'algorithme 3. Cela s'est systématiquement soldé par une divergence numérique à l'approche de la limite. Pour pouvoir garantir la convergence du processus de minimisation de  $J$  dans le cas de la solution inverse de variation totale minimale, nous avons appliqué un algorithme de reconstruction d'images sous contrainte de norme  $L^1$ .

## 7.4 Approche par projection sur un convexe

L'approche que nous présentons ici est une application d'un formalisme développé par A.Chambolle pour le débruitage d'image par minimisation de la variation totale[19]. Ce formalisme a ensuite été étendu dans [14] au cas de problèmes inverses linéaires sous contrainte de norme de type  $L^1$  minimum. Le problème inverse que nous cherchons à résoudre se reformule très bien dans ce cadre. Nous bénéficions ainsi des algorithmes développés dans ces travaux pour lesquels la convergence a été démontrée. Dans ce qui suit, nous reprenons, sans démonstration, les théorèmes et les algorithmes décrits dans [14] et nous montrons comment notre problème se reformule dans ce cadre d'application.

### 7.4.1 Discrétisation

La discrétisation est proche de celle utilisée dans 7.3.1. On utilise une version discrétisée de  $J_{\text{smooth}}$  que l'on note  $\tilde{J}_{\text{smooth}}$ . On se limite dans cette section au cas où  $\phi(x) = x$  si bien que l'on a

$$\tilde{J}_{\text{smooth}}(\underline{s}) = \|\mathbf{Q}\underline{s}\|_{(\cdot, \cdot, A_i)}.$$

Dans ce cas, les  $A_i$  étant des nombres positifs, on peut écrire

$$\tilde{J}_{\text{smooth}}(\underline{s}) = \sum_{i=1}^{n_T} |A_i [\mathbf{Q}\underline{s}]_i|.$$

Si l'on définit la matrice  $\mathbf{Q}'$  comme étant la matrice  $\mathbf{Q}$  dans laquelle les lignes  $3i + 1, 3i + 2, 3i + 3$  sont multipliées par  $A_i$  pour tout  $i \leq n_T$ , alors on a

$$\tilde{J}_{\text{smooth}}(\underline{s}) = \|\mathbf{Q}'\underline{s}\|_{(1)} \quad (7.10)$$



où  $\|\cdot\|_{(1)}$  est une généralisation de la norme  $L^1$  sur  $(\mathbb{R}^3)^{n_T}$  donnée par

$$\|\underline{\mathbf{p}}\|_{(1)} = \sum_{i=1}^{n_T} |\mathbf{p}_i|. \quad (7.11)$$

On définit de plus la norme  $\|\cdot\|_{(\infty)}$  duale de la précédente

$$\|\underline{\mathbf{p}}\|_{(\infty)} = \max_{1 \leq i \leq n_T} |\mathbf{p}_i|. \quad (7.12)$$

### 7.4.2 Minimisation

Une fois que  $\tilde{J}$  est mise sous la forme (7.10), sa minimisation peut se traiter par l'algorithme proposé dans [14] qui s'écrit alors :

---

**Algorithme 4** Problème inverse avec régularisation de type  $L^1$

---

Initialise  $\underline{\mathbf{s}}_0 = 0$  et  $n = 0$

**répéter**

$\underline{\mathbf{v}}_n \leftarrow \underline{\mathbf{s}}_n + \mu H^T(\underline{\mathbf{m}} - H\underline{\mathbf{s}}_n)$

$\underline{\mathbf{s}}_{n+1} \leftarrow (I - \Pi_{\lambda\mu K_{TV}}) \underline{\mathbf{v}}_n$  à l'aide de l'algorithme de projection 5

$n \leftarrow n + 1$

**jusqu'à**  $\|\underline{\mathbf{s}}_{n+1} - \underline{\mathbf{s}}_n\| < \text{seuil}$ .

---

$\Pi_{\lambda\mu K_{TV}}$  étant le projecteur sur l'ensemble convexe

$$K_{TV} = \{\mathbf{Q}^T \mathbf{p} \quad : \quad \mathbf{p} \in (\mathbb{R}^3)^{n_T} \quad \text{tels que} \quad \|\mathbf{p}\|_{(\infty)} \leq \lambda\mu\}$$

Cet algorithme ressemble à la descente de gradient classique (algorithme 2). La première étape de la boucle est un pas de gradient de  $J_{\text{data}}$  de longueur  $\mu$ . La seconde étape remplace le pas de gradient simple sur  $J_{\text{smooth}}$  par un algorithme de projection.

La seule condition de convergence porte sur la longueur de pas de cet algorithme par rapport à la norme de la matrice de gain  $\mathbf{H}$  et est donnée par le théorème suivant.

**Théorème 4 (Convergence de l'algorithme 4)** Soit  $\mu > 0$  vérifiant

$$\mu \|\mathbf{H}^T \mathbf{H}\| < 1$$

alors la suite  $(\underline{\mathbf{s}}_n)$  construite dans l'algorithme 4 converge vers un minimiseur global de  $\tilde{J}$

Le calcul de la projection sur l'ensemble  $K_{TV}$  est assuré par un algorithme itératif proposé par A.Chambolle basé sur une approche de point fixe (algorithme 5).

**Algorithme 5** Projection sur  $\lambda K_{TV}$ 


---

Initialise  $\underline{\mathbf{p}}_0$  dans  $(\mathbb{R}^3)^{n_T}$  tel que  $\|\underline{\mathbf{p}}\|_{(\infty)} = 1$  et  $n = 1$   
**répéter**  
 $\underline{\mathbf{q}}_n \leftarrow \mathbf{Q}'(\mathbf{Q}'^T \underline{\mathbf{p}}_n - \frac{\underline{\mathbf{s}}}{\lambda})$   
**pour** chaque  $\theta = 1, \dots, n_T$  **faire**  
 $[\underline{\mathbf{p}}_n]_\theta = \frac{[\underline{\mathbf{p}}_n]_\theta - \tau [\underline{\mathbf{q}}_n]_\theta}{1 + \tau |[\underline{\mathbf{q}}_n]_\theta|}$   
**fin pour**  
 $n \leftarrow n + 1$   
**jusqu'à**  $\|\underline{\mathbf{p}}_n - \underline{\mathbf{p}}_{n-1}\| < \text{seuil}$

---

La seule condition de convergence de cet algorithme porte sur la norme de l'opérateur  $\mathbf{Q}'$  et est donnée par :

**Théorème 5 (Convergence de l'algorithme 5)** Soit  $\mu > 0$  vérifiant

$$\tau \leq \|\mathbf{Q}'^T\|^{-2}$$

alors pour toute condition initiale  $\underline{\mathbf{p}}_0 \in B_\Theta$ , la suite  $(\underline{\mathbf{p}}_n)$  construite dans l'algorithme 5 vérifie

$$\lambda \mathbf{Q}'^T \underline{\mathbf{p}}_n \longrightarrow \Pi_{\lambda K_{TV}}(\underline{\mathbf{s}})$$

## 7.5 Amélioration de la convergence pour le problème inverse de variation totale minimale

Comme les résultats numériques le prouvent, l'algorithme de Newton itéré 3 est une technique efficace qui parvient à la convergence de manière très précise en un temps raisonnable. Cette technique ne fonctionnant qu'avec des fonctions  $C^2$ , il ne reste pour calculer la solution inverse de variation totale minimale que les algorithmes de gradient de type 2 et 4, le premier bénéficiant d'un coût moindre par rapport au second au prix d'une convergence non assurée.

### 7.5.1 Recherche de pas optimal

Une méthode classique pour améliorer les performances des algorithmes de gradient consiste à calculer ou à approximer la longueur de pas optimale à chaque étape. Cela revient à trouver, à chaque pas  $n$ , le pas  $\alpha_n$  défini par

$$\alpha_n = \underset{\alpha}{\operatorname{argmin}} J(\underline{\mathbf{x}}_n + \alpha \underline{\mathbf{g}}_n) = \underset{\alpha}{\operatorname{argmin}} \mathcal{J}(\alpha). \quad (7.13)$$

Pour  $J = J_{\text{data}} + \tilde{J}_{\text{smooth}}$ , l'équation (7.13) n'a pas de solution analytique et le calcul doit être mené par des stratégies numériques de recherche linéaire telles que l'algorithme dit de *Golden Section*[97]. Hélas, ces algorithmes ne sont rentables que si l'évaluation de  $J$  est bien moins coûteuse que l'évaluation de  $\nabla J$  et dans notre cas, le coût de ces calculs est du même ordre de grandeur. Si la détermination du pas optimal nécessite  $n$  évaluations de  $J$ , alors il est aussi coûteux de procéder à  $n$  itérations de l'algorithme de gradient à

pas fixe, ce qui est, dans notre cas et de manière empirique, bien plus efficace.

Pour contourner ce problème, on peut tenter d'approximer  $\alpha_n$  sans recourir à de multiples évaluations de  $J$ . On se place dans le cadre où  $\alpha \ll \frac{\|\underline{x}_n\|}{\|\underline{g}_n\|}$  (ce qui revient à dire que chaque déplacement effectué au cours de l'algorithme de gradient est petit, ce que se justifie très bien en pratique) et on procède à un développement limité de  $\mathcal{J}$  autour de 0.  $\mathcal{J}$  est alors approximée par un polynôme pour lequel l'équation (7.13) revient à trouver la plus petite racine positive.

Dans le cas d'un développement à l'ordre 2 par exemple, on a

$$\mathcal{J}(\alpha) \simeq J(\underline{x}_n) + \left( \underline{g}_n \cdot \nabla J(\underline{x}_n) \right) \alpha + \frac{1}{2} \left( \underline{g}_n \cdot \text{Hess}(J)(\underline{x}_n) \underline{g}_n \right) \alpha^2.$$

Cette approche n'est hélas pas adaptée à notre problème dans le cas de la variation totale minimale. En effet, le gradient  $J$  (et donc de  $\mathcal{J}$ ) est discontinu pour toute distribution de source présentant une zone de valeur constante. L'approximation de  $J$  par une quadrique est alors injustifiée et donne naissance à des erreurs. Comme nous allons le montrer par la suite, cette approche peut s'appliquer en se restreignant au gradient de  $J_{\text{data}}$  pour lequel elle est justifiée.

## 7.5.2 Modifications des algorithmes de gradient

Bien que la convergence de l'algorithme de gradient simple 2 ne soit pas assurée pour la régularisation de variation totale minimale, c'est cette technique dont nous avons essayer d'améliorer la convergence. L'algorithme 4 est en effet beaucoup trop lent et les convergences obtenues ne lui procurent aucun avantage quant à la qualité de la reconstruction.

Deux phénomènes semblent expliquer la lenteur de convergence de l'algorithme de gradient

- La lenteur de convergence du terme de moindres carrés  $J_{\text{data}}$
- L'opposition des gradients respectifs du terme  $J_{\text{data}}$  et du terme  $J_{\text{smooth}}$ .

Pour remédier au premier problème, nous procédons à une descente de gradient alternativement sur  $J_{\text{data}}$  et  $J_{\text{smooth}}$  avec un pas optimal pour  $J_{\text{data}}$ .

Le second problème est réglé dans le cadre de la modification précédente en s'assurant que le déplacement occasionné par le pas de gradient sur  $J_{\text{data}}$  annule le moins possible le déplacement généré par le pas de gradient sur  $J_{\text{smooth}}$ .

Ces deux améliorations sont détaillées ci-après.

### Descente de gradient alternative à pas optimal pour $J_{\text{data}}$

L'algorithme 2 est modifié de sorte à procéder successivement à un pas dans la direction de descente suivant  $\nabla J_{\text{data}}$  puis un pas dans la direction de descente de  $\nabla J_{\text{smooth}}$ .

---

**Algorithme 6** Gradient alterné à pas optimal pour  $J_{\text{data}}$ 


---

 Initialise  $\underline{\mathbf{s}}_0 = 0$  et  $n = 0$ 
**répéter**

$$\mu_n \leftarrow \frac{\mathbf{H} \nabla J_{\text{data}}(\underline{\mathbf{s}}_{2n}) \cdot (\mathbf{H} \underline{\mathbf{s}}_{2n} - \underline{\mathbf{m}})}{(\mathbf{H} \nabla J_{\text{data}}(\underline{\mathbf{s}}_{2n})) \cdot (\mathbf{H} \nabla J_{\text{data}}(\underline{\mathbf{s}}_{2n}))}$$

$$\underline{\mathbf{s}}_{2n+1} \leftarrow \underline{\mathbf{s}}_{2n} - \mu_n \nabla J_{\text{data}}(\underline{\mathbf{s}}_{2n})$$

$$\underline{\mathbf{s}}_{2n+2} \leftarrow \underline{\mathbf{s}}_{2n+1} - \lambda \nabla J_{\text{smooth}}(\underline{\mathbf{s}}_{2n+1})$$

$$n \leftarrow n + 1$$

**jusqu'à**  $\|\underline{\mathbf{s}}_{2n+2} - \underline{\mathbf{s}}_{2n}\| < \text{seuil}$ 


---

Pour la descente suivant  $\nabla J_{\text{data}}$ , le pas optimal  $\mu_n$  est simplement calculé comme la solution du problème d'optimisation élémentaire suivant :

$$\mu_n = \underset{\alpha}{\operatorname{argmin}} J_{\text{data}}(\underline{\mathbf{s}}_{2n} - \alpha \nabla J_{\text{data}}(\underline{\mathbf{s}}_{2n})).$$

La solution de ce problème est

$$\mu_n = \frac{\mathbf{H} \nabla J_{\text{data}}(\underline{\mathbf{s}}_{2n}) \cdot (\mathbf{H} \underline{\mathbf{s}}_{2n} - \underline{\mathbf{m}})}{(\mathbf{H} \nabla J_{\text{data}}(\underline{\mathbf{s}}_{2n})) \cdot (\mathbf{H} \nabla J_{\text{data}}(\underline{\mathbf{s}}_{2n}))}. \quad (7.14)$$

Cet algorithme ne minimise pas à l'énergie  $J = J_{\text{data}} + \lambda J_{\text{smooth}}$  à proprement parler puisque le poids des données varie au fur et à mesure de l'algorithme. Il est cependant possible d'obtenir un encadrement du poids des données.

A cette fin, on évalue la quantité  $\mu_n$ .

$$\begin{aligned} \frac{\langle \mathbf{H}^T(\mathbf{H} \underline{\mathbf{s}} - \underline{\mathbf{m}}), \mathbf{H}^T(\mathbf{H} \underline{\mathbf{s}} - \underline{\mathbf{m}}) \rangle}{\langle \mathbf{H} \mathbf{H}^T(\mathbf{H} \underline{\mathbf{s}} - \underline{\mathbf{m}}), \mathbf{H} \mathbf{H}^T(\mathbf{H} \underline{\mathbf{s}} - \underline{\mathbf{m}}) \rangle} &= \frac{\langle \mathbf{H}^T \underline{\mathbf{v}}, \mathbf{H}^T \underline{\mathbf{v}} \rangle}{\langle \mathbf{H} \mathbf{H}^T \underline{\mathbf{v}}, \mathbf{H} \mathbf{H}^T \underline{\mathbf{v}} \rangle} \\ &= \frac{\langle \mathbf{H} \mathbf{H}^T \underline{\mathbf{v}}, \underline{\mathbf{v}} \rangle}{\langle \mathbf{H} \mathbf{H}^T \underline{\mathbf{v}}, \mathbf{H} \mathbf{H}^T \underline{\mathbf{v}} \rangle} \end{aligned} \quad (7.15)$$

La matrice  $\mathbf{H} \mathbf{H}^T$  n'est autre que la matrice de covariance des capteurs que nous supposons de rang plein et donc inversible. Elle se diagonalise alors dans une base de vecteurs propres orthogonaux que l'on note  $\mathcal{B}$ , les valeurs propres étant toutes positives. En décomposant  $\underline{\mathbf{v}}$  sur  $\mathcal{B}$ , on obtient les encadrements

$$\lambda_{\min} \|\underline{\mathbf{v}}\|^2 \leq \langle \mathbf{H} \mathbf{H}^T \underline{\mathbf{v}}, \underline{\mathbf{v}} \rangle \leq \lambda_{\max} \|\underline{\mathbf{v}}\|^2$$

et

$$\lambda_{\min}^2 \|\underline{\mathbf{v}}\|^2 \leq \langle \mathbf{H} \mathbf{H}^T \underline{\mathbf{v}}, \mathbf{H} \mathbf{H}^T \underline{\mathbf{v}} \rangle \leq \lambda_{\max}^2 \|\underline{\mathbf{v}}\|^2.$$

$\lambda_{\min}$  et  $\lambda_{\max}$  sont respectivement la plus petite et la plus grande valeur propre de  $\mathbf{H} \mathbf{H}^T$ . En réinjectant ces inégalités dans l'équation (7.15) on obtient la relation

$$\frac{\lambda_{\min}}{\lambda_{\max}^2} \leq \mu_n \leq \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}^2} \quad (7.16)$$

qui montre que le pas optimal utilisé dans l'algorithme 6 est borné, les bornes dépendant uniquement du conditionnement de la matrice  $\mathbf{H} \mathbf{H}^T$ . Cela montre par conséquent que le paramètre de lissage garde un sens significatif face à ces bornes même si l'on ne minimise plus une énergie que l'on contrôle puisque l'on ne peut plus imposer une valeur au paramètre de lissage mais un intervalle relatif de valeurs dont la taille dépend du conditionnement de la matrice  $\mathbf{H} \mathbf{H}^T$ .

La modification qui mène à l'algorithme 6 ne nous permet pas d'en démontrer la convergence. Bien que cette dernière n'ait posé aucun problème sur la totalité des calculs que nous avons menés, nous pensons qu'elle n'est pas systématique et qu'une dérive du pas optimal pour  $J_{\text{data}}$  pourrait survenir et empêcher l'algorithme de converger. L'approche que nous proposons peut n'être vue que comme une étape d'initialisation visant à se rapprocher au plus près du minimum avant de se servir de l'algorithme 4 dont la convergence est garantie.

### Pseudo-alignement des gradients

Cette modification de l'algorithme de gradient ne modifie pas l'énergie minimisée et peut être appliquée aussi bien à l'algorithme 2 qu'à l'algorithme 6. C'est pour ce dernier algorithme que nous la présentons ci dessous.

---

**Algorithme 7** Gradient alterné à pas optimal pour  $J_{\text{data}}$  et pseudo-alignement des gradients

---

Initialise  $\underline{s}_0 = 0$  et  $n = 0$

**répéter**

$$\mu_n \leftarrow \frac{\mathbf{H} \nabla J_{\text{data}}(\underline{s}_{2n}) \cdot (\mathbf{H} \underline{s}_{2n} - \underline{\mathbf{m}})}{(\mathbf{H} \underline{s}_{2n} - \underline{\mathbf{m}}) \cdot (\mathbf{H} \underline{s}_{2n} - \underline{\mathbf{m}})}$$

$$\underline{\mathbf{k}}_n \leftarrow (I - \mathbf{H}^\top (\mathbf{H} \mathbf{H}^\top)^{-1} \mathbf{H}) \lambda \nabla J_{\text{smooth}}(\underline{s}_{2n})$$

$$\underline{s}_{2n+1} \leftarrow \underline{s}_{2n} - (\mu_n \nabla J_{\text{data}}(\underline{s}_{2n}) + \underline{\mathbf{k}}_n)$$

$$\underline{s}_{2n+2} \leftarrow \underline{s}_{2n+1} - \lambda \nabla J_{\text{smooth}}(\underline{s}_{2n+1})$$

$$n \leftarrow n + 1$$

**jusqu'à**  $\|\underline{s}_{2n+2} - \underline{s}_{2n}\| < \text{seuil}$

---

Le première étape de la boucle calcule un vecteur  $\underline{\mathbf{k}}_n$  du noyau de  $\mathbf{H}$  visant à corriger le gradient de  $J_{\text{data}}$  de telle sorte que ce dernier aille dans la même direction que le gradient de  $J_{\text{smooth}}$ .

De manière plus détaillée,  $\underline{\mathbf{k}}_n$  est la solution du problème de minimisation suivant :

$$\underline{\mathbf{k}}_n = \underset{\mathbf{H}\underline{\mathbf{v}}=0}{\operatorname{argmin}} \|\lambda \nabla J_{\text{smooth}}(\underline{s}_{2n}) - (\nabla J_{\text{data}}(\underline{s}_{2n}) + \underline{\mathbf{v}})\|^2$$

Le calcul  $\underline{\mathbf{k}}$  est immédiat grâce aux conditions d'optimalité et on a

$$\underline{\mathbf{k}}_n = (I - \mathbf{H}^\top (\mathbf{H} \mathbf{H}^\top)^{-1} \mathbf{H}) \nabla J_{\text{smooth}}(\underline{s}_{2n})$$

Cette quantité est la projection sur le noyau de  $\mathbf{H}$  du gradient de  $J_{\text{smooth}}$ . Le calcul de  $\underline{\mathbf{k}}_n$  présente un coût non négligeable puisqu'il nécessite une deuxième évaluation de  $\nabla J_{\text{smooth}}$  (donc deux fois plus d'évaluations par boucle) et de produits matrice-vecteur du même coût que ceux nécessaires au calcul de  $\nabla J_{\text{data}}$ . L'implémentation double donc le coût de chaque itération.

### 7.5.3 Gradient projeté

Il existe enfin un moyen de remédier simultanément à la lenteur de la convergence du terme d'attache aux données et à l'opposition des deux gradients. Cela consiste à décrire

la résolution du problème inverse non plus comme la minimisation de  $J$  mais comme la solution du problème de minimisation

$$\min_{J_{\text{data}}(s)=0} J_{\text{smooth}}(s). \quad (7.17)$$

Cette approche se heurte cependant au caractère mal posé du problème inverse car même si le bruit est de mesure faible, son ajout aux mesures théoriques donne naissance à des mesures réelles sans véritable cohérence physique qui ne peuvent être exactement expliquées que par des sources très complexes. Cette technique fut en fait implémentée dans deux buts :

- accélérer la convergence et donc servir de référence face aux méthodes décrites précédemment.
- vérifier si un "miracle" numérique ne pouvait pas expliquer le bruit avec des sources de variation totale minime. Cet espoir insensé semblait justifié par la taille considérable du noyau de la matrice de gain  $\mathbf{H}$  qui laisse un très vaste espace pour expliquer le bruit avec une solution lisse.

Le calcul de la solution du problème de minimisation 7.17 est assuré par l'algorithme de gradient projeté 8.

---

**Algorithme 8** Gradient projeté

---

Initialise  $\underline{\mathbf{s}}_0 = \text{pinv}(\mathbf{H}) * \underline{\mathbf{m}}$  et  $n = 0$

**répéter**

$\underline{\mathbf{s}}_{n+1} \leftarrow \underline{\mathbf{s}}_n - (I - \mathbf{H}^\top (\mathbf{H} \mathbf{H}^\top)^{-1} \mathbf{H}) \nabla J_{\text{smooth}}(\underline{\mathbf{s}}_n)$

$n \leftarrow n + 1$

**jusqu'à**  $\|\underline{\mathbf{s}}_n - \underline{\mathbf{s}}_{n-1}\| < \text{seuil}$

---

Les expériences ont montré que le bruit, même de faible amplitude, ne pouvait être expliqué par des sources lisses. Comme attendu, dans le cas non bruité, la convergence de cet algorithme est la meilleure et les résultats obtenus sont qualitativement les meilleurs. Cela est probablement dû au fait que cet algorithme ne nécessite aucun choix quant au paramètre de lissage  $\lambda$ . En fait, la solution obtenue par ce biais est la solution que l'on devrait obtenir en faisant tendre  $\lambda$  vers 0 dans la minimisation de  $J$ .

---

# Chapitre 8

## Expériences numériques

### 8.1 Segmentation

Nous décrivons ici le lourd procédé qui nous a permis de créer les maillages de nos modèles de tête réalistes.

Cette section est écrite dans l'espoir qu'elle puisse être utile à quelqu'un qui envisagerait de s'attaquer à la même tâche. C'est également l'occasion de montrer qu'il manque une solution logicielle gratuite pour l'ensemble de ce procédé. Nous faisons, d'ailleurs, des propositions dans ce sens à la fin de cette partie.

Après un tour d'horizon des offres logicielles gratuites disponibles pour la segmentation des IRM anatomiques, notre premier choix s'est porté sur *BrainSuite*[\[105, 114\]](#). A l'époque, le logiciel était encore en version 0.2 $\alpha$ . Malgré les nombreux plantages que nous avons rencontrés, nous avons tout de suite été impressionnés par le potentiel de ce logiciel capable de segmenter toutes les couches nécessaires à l'obtention d'un modèle réaliste. A l'issue de premières utilisations, nous n'avons pas été satisfaits de la triangulation du cortex que nous parvenions à obtenir.

Pour cette tâche, nous nous sommes tournés vers *ABSOLUt*[\[98, 103\]](#) qui fait preuve d'un niveau d'automatisation impressionnant. Ce logiciel nous a permis, d'obtenir une triangulation de l'interface entre la matière grise et la matière blanche que nous avons utilisé pour porter la distribution source. Cet outil fournit des maillages à topologie sphérique d'une taille à spécifier. Ce point s'est révélé très pratique pour obtenir des maillages de la taille désirée qui était conditionnée par les disponibilités en mémoire vive de nos machines.

Une fois le parti pris d'utiliser deux logiciels différents pour construire notre modèle de tête, il a fallu faire cohabiter les maillages en provenance de ces deux sources. C'est-à-dire qu'il fallait pouvoir garantir au pire la non-intersection des maillages et au mieux une distance minimale entre ces derniers. Cette étape a nécessité la création d'un petit logiciel de recalage entre les repères utilisés par *BrainSuite* et *ABSOLUt*.

Nous nous sommes ensuite heurtés à un problème avec *BrainSuite* qui nous empêché d'utiliser, entre autres, sa fonctionnalité de correction topologique de maillages. Il a fallu de nombreuses tentatives de corrections manuelles de la segmentation ajoutées à de nombreux "bricolages" des maillages obtenus pour finalement parvenir à faire cohabiter les maillages de la peau et des parois interne et externe du crâne produits par *BrainSuite* avec celui de l'interface matière blanche - matière grise portant les sources produit par *ABSOLUt*.

Il a ensuite fallu réduire la taille des maillages produits par *BrainSuite*, cette dernière

n'étant pas réglable au sein du logiciel. L'utilisation d'un logiciel de déraffineur de maillage a conduit à un modèle de tête de plus faible résolution mais dont les surfaces s'intersectaient. En nous basant sur OpenMesh [93], nous avons développé un outil pour déraffiner les maillages sous contrôle topologique en évitant les intersections. Le déraffinage est assuré par fusion de couples de sommets. Une pile des fusions est maintenue à jour et l'absence d'intersection est testée avant de procéder à chaque fusion.

A la fin de cette chaîne, on dispose d'un modèle de tête réaliste avec des interfaces de résolution moyenne (700 sommets dans nos expériences) et une surface porteuse de source de résolution élevée (36000 sommets dans nos expériences).

La seule propriété garantie par cette chaîne est la non intersection des surfaces. On ne dispose d'aucun contrôle sur la distance inter-surfaces. La précision des calculs menés lors de l'assemblage des matrices du problème direct nécessaires à l'obtention de la matrice  $\mathbf{H}$  ne peut donc pas être garantie. De même, les mailleurs et le déraffineur utilisés ne tiennent compte que de l'information géométrique et les triangulations générées peuvent contenir des triangles de toutes tailles et de toutes formes. Cela peut avoir des conséquences néfastes sur le conditionnement de la matrice  $\mathbf{A}$  de la BEM symétrique.

Pour conclure, l'obtention des maillages de tête réalistes a été assurée par une chaîne de traitement ad-hoc requérant un haut niveau d'intervention humaine (et donc de grandes pertes de temps) et ne permettant pas de garantir une forme quelconque de précision numérique.

Nous tenons dès à présent à souligner que la version 2.0 de BrainSuite est sortie durant la rédaction de ce mémoire. Nous y plaçons les plus grands espoirs. Nous reviendrons plus loin dans ce document sur le sujet de la création des modèles réalistes.

En guise d'illustration, nous exposons la géométrie obtenue pour l'expérience de somatotopie à la figure 8.1.



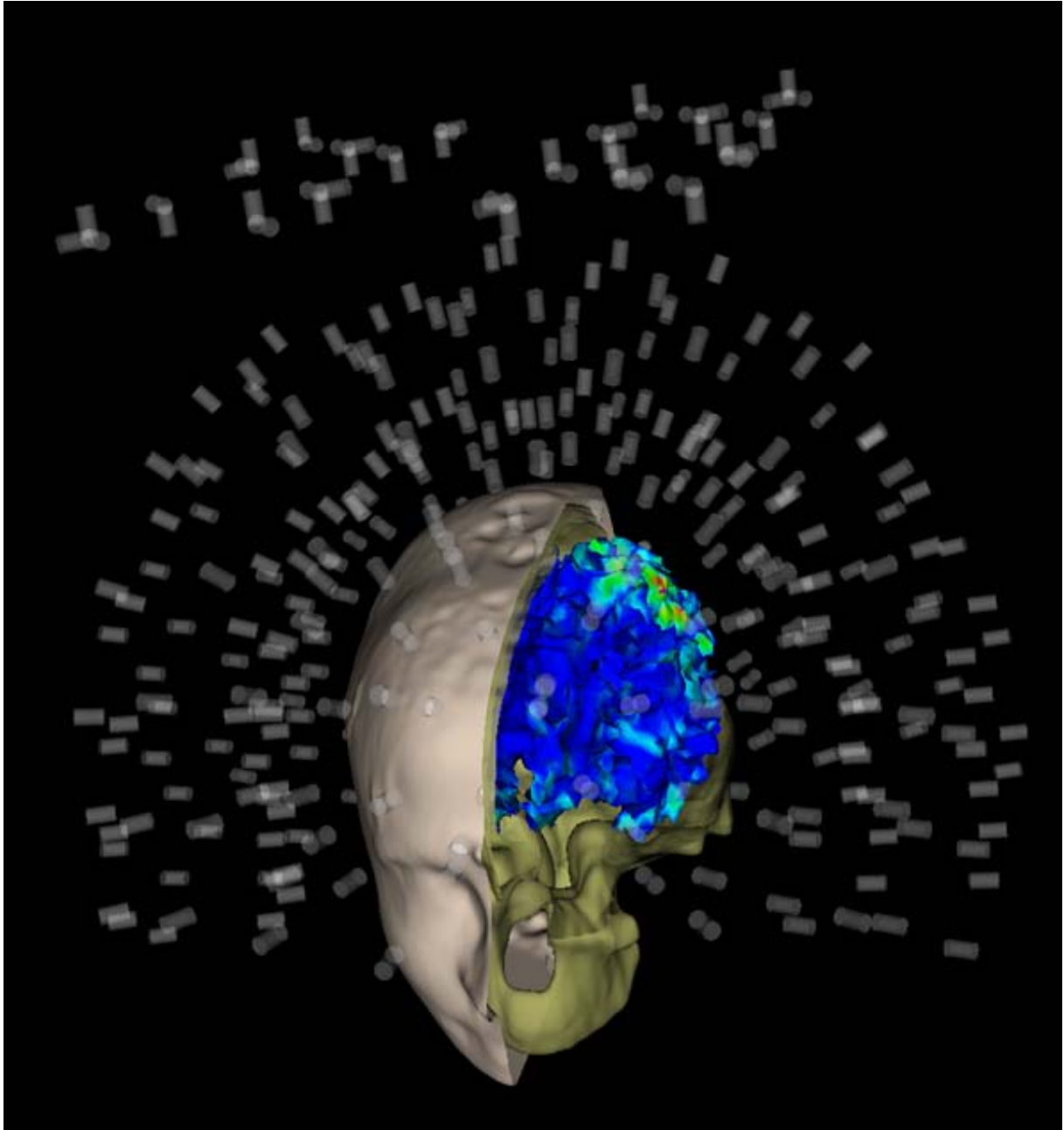


FIG. 8.1 – Le modèle de tête de l'expérience de somatotopie.

## 8.2 Implémentation

Les trois méthodes exposées dans la section précédentes ont été implémentées en C++ à la fois sur Microsoft Visual Studio sous Windows XP et sur GNU gcc sous Linux Fedora Core 2/3/4.

Lors de l'écriture des programmes, une attention particulière a été portée sur deux points précis :

- L'occupation de la mémoire a été réduite au minimum étant donné la taille des matrices impliquées. Il n'a pas pour autant été fait appel à des techniques dites *out of core*[111] jugées trop pénalisantes en terme de temps de calcul.
- Compte tenu de la taille des problèmes traités, un effort particulier a également été fait sur la vitesse du code. Cela s'est traduit par un souci constant de l'alignement des données en mémoire pour accroître l'efficacité du cache et par l'utilisation de bibliothèques de calcul matriciel spécialisées en fonction de l'architecture et du système d'exploitation. On citera notamment Intel *Math Kernel Library*(MKL)[61] pour l'implémentation Pentium/Xeon sous Windows et Linux x86 et *AMD Core Math Library* (ACML)[4] pour l'implémentation Athlon64/Opteron sous Linux x86-64.

Concernant la solution inverse de variation totale minimale, on peut également noter que l'implémentation  $\tilde{J}_{\text{smooth}}$  est plus rapide que celle de  $J_{\text{smooth}}$ . Elle a en effet été mise au point dans l'optique, entre autres, d'une implémentation rapide. Elle tire particulièrement profit de sa formulation à base de matrices creuses pour lesquelles les algorithmes de multiplication sont particulièrement efficace en terme de cache.

L'inversion du système impliquant la Hessienne dans l'algorithme 3 est assurée par un algorithme de type MINRES. Cette technique produit une descente identique à celle produite par le gradient conjugué pour une matrice symétrique définie positive mais n'est pas sujette à des ruptures de convergence dans le cas contraire.

Nous présentons ici deux expériences numériques. La première vise à valider les techniques de problème inverse proposées et à les comparer entre elles sur des données synthétiques. La deuxième teste quant à elle la réalité de terrain sur un jeu de données expérimentales et confronte les résultats de nos algorithmes à une technique standard pour validation.

## 8.3 Validation synthétique et comparaison des algorithmes

Cette série d'expérience a été menée sur une géométrie issue d'un jeu de données acquises au Lena pour une expérience de vision menée par Anne Lise Paradis. Nous nous sommes servi des données d'IRM anatomique et des positions des capteurs pour obtenir un modèle de tête réaliste entouré de 151 capteurs MEG et 61 capteurs EEG.

La première expérience compare la convergence des différents algorithmes consacrés au problème inverse de variation totale minimale sur un cas type pour un jeu de paramètres

commun. Les résultats sont présentés sur la figures 8.2.

Les algorithmes 2 et 4 présentent un faible taux de convergence qui est très similaire. Les améliorations proposées en 7.5.2 et 7.5.2 accélèrent fortement la minimisation de  $J$ . Le plus grand gain est obtenu grâce à l'algorithme à pas optimal sur  $J_{\text{data}}$ . L'apport de l'alignement des gradients semble plus marqué près de l'équilibre pour des déplacements faibles dans la descente de gradient. En effet, l'alignement des gradients présente un intérêt optimal pour des gradients de  $J_{\text{data}}$  et  $J_{\text{smooth}}$  d'un même ordre de grandeur, ce qui est le cas au voisinage du minimum. L'algorithme présentant les meilleures performances est le gradient à pas optimal pour  $J_{\text{data}}$  avec approche par énergie discrétisée. C'est donc l'algorithme que nous avons logiquement utilisé pour représenter la solution inverse de variation totale minimale dans le reste des expériences.

Pour la deuxième expérience, deux sources synthétiques ont été créées. Une source est constituée d'un patch d'activité étendu situé sur le sillon pré-central. L'autre source est composée de trois patches d'activité d'une surface plus petite : un sur la moitié droite du sillon pré-central, un sur la moitié gauche du sillon pré-central et un dernier sur le lobe occipital. Tous les patches d'activité utilisés sont des zones d'intensité 1.

Des mesures MEG et EEG ont été simulées pour ces deux sources. Un bruit uniforme I.I.D. d'une amplitude de 5, 10 et 20% de l'amplitude moyenne du signal est ajouté à ces signaux.

Dans cette deuxième expérience, on compare à partir de ces données MEG et EEG la qualité des reconstruction produites par

- la méthode inverse de norme minimale notée MN
- la méthode inverse de norme minimale du gradient de la solution notée HEAT (en référence à l'équation de la chaleur)
- la méthode inverse de variation totale minimale notée TV.

Pour chaque niveau de bruit, chaque source, chaque modalité et chaque méthode inverse, le coefficient de régularisation  $\lambda$  est choisi de sorte à maximiser la qualité subjective de la solution. Nous avons choisi ce mode opératoire car il est proche de celui utilisé "sur le terrain". Dans chacun des cas, on calcule deux grandeurs permettant de quantifier le résultat des algorithmes :

- la variance résiduelle<sup>1</sup> : en notant  $s_0$  la source à reconstruire et  $s$  la source reconstruite, il s'agit de la quantité  $\frac{\|Hs - Hs_0\|}{\|Hs_0\|}$ .
- le taux de corrélation  $\int_S s(\mathbf{x}) \cdot s_0(\mathbf{x}) dS(\mathbf{x})$ . Pour nos sources discrétisées sur des bases de fonctions P1, ce calcul est mené de manière exacte à l'aide d'une règle de quadrature sur le triangle d'un degré supérieur à 2.

Comme dans tous les problèmes de traitement d'image, la corrélation est un indicateur quantitatif qui ne reflète pas la qualité visuelle des images reconstruites. C'est la raison pour laquelle nous fournissons dans les annexes D.1 et D.2 l'ensemble des images des reconstructions en question. Par ailleurs, nous avons également procédé à des reconstructions à l'aide de mesures non bruitées grâce à des versions contraintes de chacune des méthodes implémentées grâce à l'algorithme 8. Ces algorithmes sont désignés respectivement par C-MN, C-HEAT et C-TV. Ces reconstructions qui s'affranchissent du choix du paramètre de lissage  $\lambda$  représentent les meilleures reconstructions atteignables par chacune des méthodes en l'absence de bruit sur les capteurs.

---

<sup>1</sup>il s'agit en fait d'un abus de langage dans notre cas car on ne dispose que d'une reconstruction à un instant donné

Les résultats de ces simulations sont réunis dans les figures 8.3 et 8.4 ainsi que dans tables 8.1 et 8.2.

Pour chaque reconstruction, la méthode TV produit une bien meilleure estimation de l'emplacement et de l'étendue des sources. Cette reconstruction est, de plus, beaucoup moins sensible aux niveaux de bruit élevés. Il convient toutefois de pondérer la qualité des résultats par le temps de calcul nécessaire à leur obtention. Pour la méthode TV, chaque solution est obtenue après 10000 itérations de l'algorithme 6. Les solutions MN et HEAT sont obtenues ici par résolution de l'algorithme 3 qui converge en une itération avec la résolution d'un système linéaire. La méthode TV nécessite au final une dizaine de minutes de calcul<sup>2</sup> contre quelques secondes à une minute pour les deux autres méthodes qui sont linéaires (pour ces deux méthodes, des pré-calculs menant à de grandes accélérations seraient possibles grâce à des méthodes à base de SVD).

La méthode HEAT ne peut hélas pas être considérée comme une version dégradée de la méthode TV. Les faibles variations spatiales qu'elle permet de reconstruire s'oppose à une délimitation précise des sources. Le centre de l'activité est souvent déplacé pour s'accommoder de ce phénomène. La solution HEAT peut toutefois présenter une alternative intéressante à la solution MN si la rapidité du calcul est un facteur déterminant. En fait, les deux solutions présentent des aspects qualitatifs opposés sur certains points : la méthode MN propose une interprétation assez "ponctualisée" de la source alors que la méthode HEAT en propose une reconstruction étalée.

Pour les figures des annexes D.1 et D.2, le code des couleurs débute par les zones d'inactivité en blanc en passant par les zones de faible activité en bleu jusqu'aux zones d'activité maximale en rouge.

---

<sup>2</sup>processeur AMD opteron 1.8 GHz sous linux FC4 64 bit

TAB. 8.1 – Résultats des tests synthétiques de problème inverse MEG

nb de sources	algorithme	bruit	$\lambda$	variance	corr.	figures
1	C-MN	0%	/	0.0%	48.5 %	<a href="#">D.2</a> , <a href="#">D.3</a> , <a href="#">D.4</a> , <a href="#">D.5</a>
1	C-HEAT	0%	/	0.0%	41.8 %	<a href="#">D.2</a> , <a href="#">D.3</a> , <a href="#">D.4</a> , <a href="#">D.5</a>
1	C-TV	0%	/	0.0%	84.5 %	<a href="#">D.2</a> , <a href="#">D.3</a> , <a href="#">D.4</a> , <a href="#">D.5</a>
1	MN	5%	$10^{-5}$	4.0%	24.4 %	<a href="#">D.6</a> , <a href="#">D.9</a> , <a href="#">D.12</a> , <a href="#">D.15</a>
1	MN	10%	$10^{-5}$	10.8%	23.1 %	<a href="#">D.7</a> , <a href="#">D.10</a> , <a href="#">D.13</a> , <a href="#">D.16</a>
1	MN	20%	$10^{-4}$	13.2%	18.4 %	<a href="#">D.8</a> , <a href="#">D.11</a> , <a href="#">D.14</a> , <a href="#">D.17</a>
1	HEAT	5%	$10^{-6}$	2.0%	20.2 %	<a href="#">D.6</a> , <a href="#">D.9</a> , <a href="#">D.12</a> , <a href="#">D.15</a>
1	HEAT	10%	$10^{-6}$	4.0%	12.0 %	<a href="#">D.7</a> , <a href="#">D.10</a> , <a href="#">D.13</a> , <a href="#">D.16</a>
1	HEAT	20%	$10^{-5}$	8.9%	12.7 %	<a href="#">D.8</a> , <a href="#">D.11</a> , <a href="#">D.14</a> , <a href="#">D.17</a>
1	TV	5%	$10^{-4}$	3.8%	76.4 %	<a href="#">D.6</a> , <a href="#">D.9</a> , <a href="#">D.12</a> , <a href="#">D.15</a>
1	TV	10%	$10^{-4}$	10.3%	75.3 %	<a href="#">D.7</a> , <a href="#">D.10</a> , <a href="#">D.13</a> , <a href="#">D.16</a>
1	TV	20%	$10^{-4}$	11.3%	80.7 %	<a href="#">D.8</a> , <a href="#">D.11</a> , <a href="#">D.14</a> , <a href="#">D.17</a>
3	C-MN	0%	/	0.0%	40.8 %	<a href="#">D.18</a> , <a href="#">D.19</a> , <a href="#">D.20</a> , <a href="#">D.21</a>
3	C-HEAT	0%	/	0.0%	30.8 %	<a href="#">D.18</a> , <a href="#">D.19</a> , <a href="#">D.20</a> , <a href="#">D.21</a>
3	C-TV	0%	/	0.0%	86.8 %	<a href="#">D.18</a> , <a href="#">D.19</a> , <a href="#">D.20</a> , <a href="#">D.21</a>
3	MN	5%	$10^{-6}$	2.5%	18.2 %	<a href="#">D.22</a> , <a href="#">D.25</a> , <a href="#">D.28</a> , <a href="#">D.31</a>
3	MN	10%	$10^{-6}$	4.8%	17.3 %	<a href="#">D.23</a> , <a href="#">D.26</a> , <a href="#">D.29</a> , <a href="#">D.32</a>
3	MN	20%	$10^{-6}$	8.9%	13.1 %	<a href="#">D.24</a> , <a href="#">D.27</a> , <a href="#">D.30</a> , <a href="#">D.33</a>
3	HEAT	5%	$10^{-7}$	1.6%	14.3 %	<a href="#">D.22</a> , <a href="#">D.25</a> , <a href="#">D.28</a> , <a href="#">D.31</a>
3	HEAT	10%	$10^{-6}$	4.4%	11.7 %	<a href="#">D.23</a> , <a href="#">D.26</a> , <a href="#">D.29</a> , <a href="#">D.32</a>
3	HEAT	20%	$10^{-5}$	9.5%	11.8 %	<a href="#">D.24</a> , <a href="#">D.27</a> , <a href="#">D.30</a> , <a href="#">D.33</a>
3	TV	5%	$10^{-5}$	3.3%	46.7 %	<a href="#">D.22</a> , <a href="#">D.25</a> , <a href="#">D.28</a> , <a href="#">D.31</a>
3	TV	10%	$10^{-5}$	5.3%	45.6 %	<a href="#">D.23</a> , <a href="#">D.26</a> , <a href="#">D.29</a> , <a href="#">D.32</a>
3	TV	20%	$10^{-5}$	9.8%	45.1 %	<a href="#">D.24</a> , <a href="#">D.27</a> , <a href="#">D.30</a> , <a href="#">D.33</a>

TAB. 8.2 – Résultats des tests synthétiques de problème inverse EEG

nb de sources	algorithme	bruit	$\lambda$	variance	corr.	figures
1	C-MN	0%	/	0.0%	31.8 %	<a href="#">D.34</a> , <a href="#">D.35</a> , <a href="#">D.36</a> , <a href="#">D.37</a>
1	C-HEAT	0%	/	0.0%	21.5 %	<a href="#">D.34</a> , <a href="#">D.35</a> , <a href="#">D.36</a> , <a href="#">D.37</a>
1	C-TV	0%	/	0.0%	50.0 %	<a href="#">D.34</a> , <a href="#">D.35</a> , <a href="#">D.36</a> , <a href="#">D.37</a>
1	MN	5%	$10^{-7}$	1.1%	26.7 %	<a href="#">D.38</a> , <a href="#">D.41</a> , <a href="#">D.44</a> , <a href="#">D.47</a>
1	MN	10%	$10^{-6}$	4.6%	25.3 %	<a href="#">D.39</a> , <a href="#">D.42</a> , <a href="#">D.45</a> , <a href="#">D.48</a>
1	MN	20%	$10^{-6}$	8.4%	22.3 %	<a href="#">D.40</a> , <a href="#">D.43</a> , <a href="#">D.46</a> , <a href="#">D.49</a>
1	HEAT	5%	$10^{-7}$	1.6%	14.4 %	<a href="#">D.38</a> , <a href="#">D.41</a> , <a href="#">D.44</a> , <a href="#">D.47</a>
1	HEAT	10%	$10^{-7}$	2.1%	9.7 %	<a href="#">D.39</a> , <a href="#">D.42</a> , <a href="#">D.45</a> , <a href="#">D.48</a>
1	HEAT	20%	$10^{-6}$	6.5%	9.4 %	<a href="#">D.40</a> , <a href="#">D.43</a> , <a href="#">D.46</a> , <a href="#">D.49</a>
1	TV	5%	$10^{-6}$	1.6%	38.3 %	<a href="#">D.38</a> , <a href="#">D.41</a> , <a href="#">D.44</a> , <a href="#">D.47</a>
1	TV	10%	$10^{-5}$	5.2%	30.6 %	<a href="#">D.39</a> , <a href="#">D.42</a> , <a href="#">D.45</a> , <a href="#">D.48</a>
1	TV	20%	$10^{-5}$	7.7%	25.0 %	<a href="#">D.40</a> , <a href="#">D.43</a> , <a href="#">D.46</a> , <a href="#">D.49</a>
3	C-MN	0%	/	0.0%	21.9 %	<a href="#">D.50</a> , <a href="#">D.51</a> , <a href="#">D.52</a> , <a href="#">D.53</a>
3	C-HEAT	0%	/	0.0%	20.2 %	<a href="#">D.50</a> , <a href="#">D.51</a> , <a href="#">D.52</a> , <a href="#">D.53</a>
3	C-TV	0%	/	0.0%	31.4 %	<a href="#">D.50</a> , <a href="#">D.51</a> , <a href="#">D.52</a> , <a href="#">D.53</a>
3	MN	5%	$10^{-6}$	3.4%	17.2 %	<a href="#">D.54</a> , <a href="#">D.57</a> , <a href="#">D.60</a> , <a href="#">D.63</a>
3	MN	10%	$10^{-6}$	4.5%	16.4 %	<a href="#">D.55</a> , <a href="#">D.58</a> , <a href="#">D.61</a> , <a href="#">D.64</a>
3	MN	20%	$10^{-6}$	7.3%	14.2 %	<a href="#">D.56</a> , <a href="#">D.59</a> , <a href="#">D.62</a> , <a href="#">D.65</a>
3	HEAT	5%	$10^{-7}$	0.8%	15.0 %	<a href="#">D.54</a> , <a href="#">D.57</a> , <a href="#">D.60</a> , <a href="#">D.63</a>
3	HEAT	10%	$10^{-6}$	2.6%	13.6 %	<a href="#">D.55</a> , <a href="#">D.58</a> , <a href="#">D.61</a> , <a href="#">D.64</a>
3	HEAT	20%	$10^{-5}$	7.8%	12.2 %	<a href="#">D.56</a> , <a href="#">D.59</a> , <a href="#">D.62</a> , <a href="#">D.65</a>
3	TV	5%	$10^{-6}$	1.8%	22.7 %	<a href="#">D.54</a> , <a href="#">D.57</a> , <a href="#">D.60</a> , <a href="#">D.63</a>
3	TV	10%	$10^{-6}$	3.0%	19.2 %	<a href="#">D.55</a> , <a href="#">D.58</a> , <a href="#">D.61</a> , <a href="#">D.64</a>
3	TV	20%	$10^{-5}$	9.8%	18.4 %	<a href="#">D.56</a> , <a href="#">D.59</a> , <a href="#">D.62</a> , <a href="#">D.65</a>

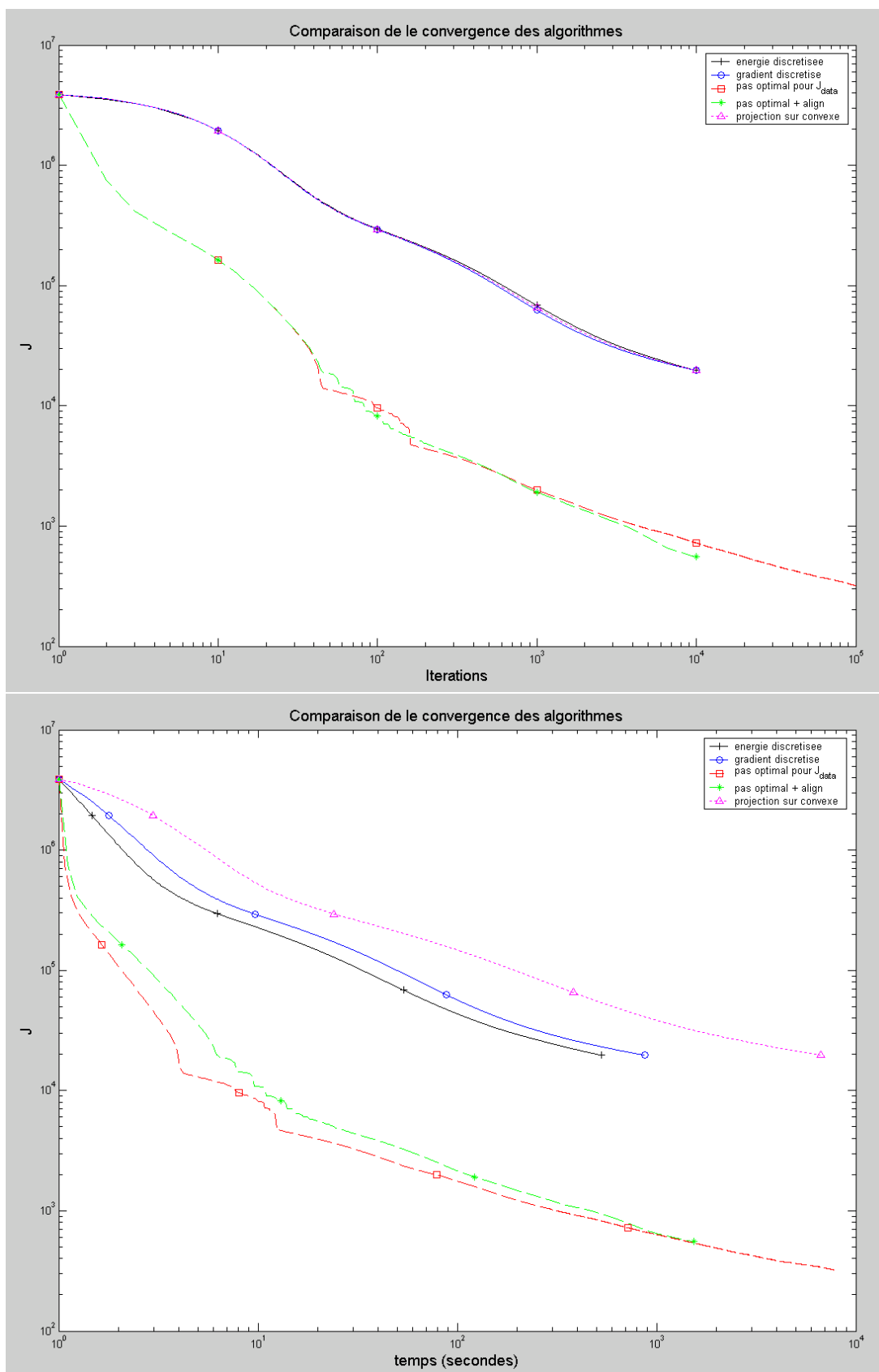


FIG. 8.2 – Convergence des algorithmes.

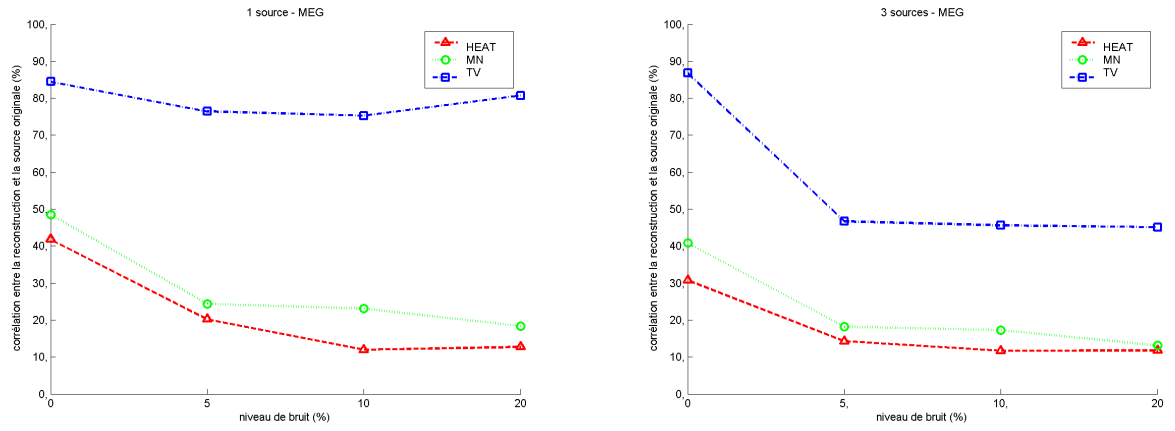


FIG. 8.3 – Taux de corrélation en fonction du bruit pour les expériences synthétiques en MEG

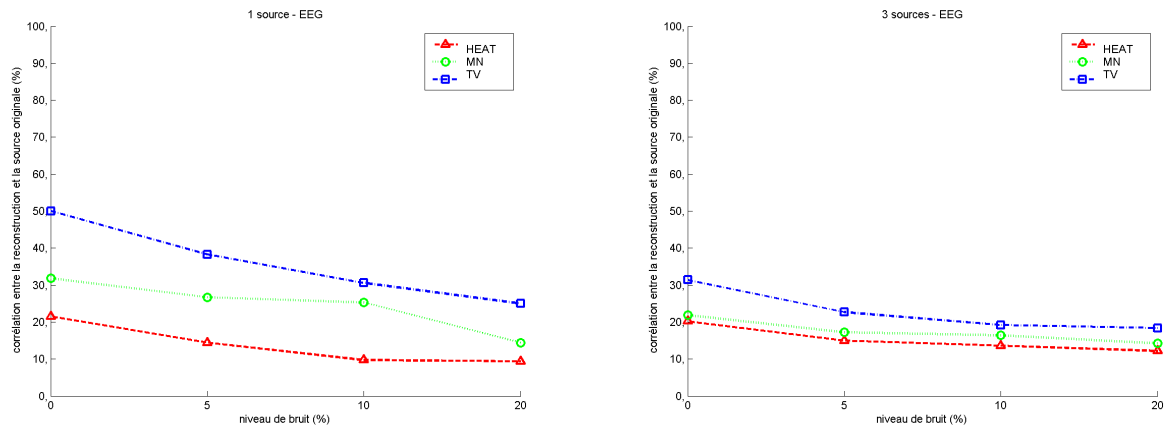


FIG. 8.4 – Taux de corrélation en fonction du bruit pour les expériences synthétiques en MEG



## 8.4 Validation expérimentale

Nous nous intéressons ici au jeu de données fourni par le LENA et acquis au *MEG-Center* de l'Hôpital de la Pitié-Salpêtrière à Paris. Il s'agit d'une expérience de somatotopie consistant à stimuler par une impulsion électrique l'extrémité de chaque doigt d'une main de manière successive. Lors de cette expérience, des sources très focales sont activées dans le cerveau. Cela permet de tester assez facilement la précision d'une méthode inverse car la position des sources à estimer peut être déterminée de manière assez précise par des spécialistes à l'aide de considérations purement anatomiques.

Dans notre contexte, cette expérience permet de valider toute la chaîne problème direct - problème inverse en se confrontant à des données réelles. Dans les expériences synthétiques, les données étaient synthétisées à l'aide du problème direct utilisé pour minimiser le terme d'attache aux données  $J_{\text{data}}$ . Toute erreur concernant ce terme est alors neutralisée.

Les figures 8.5, 8.6, 8.7 et 8.8 montrent l'image reconstruite pour chaque doigt stimulé. Les couleurs froides représentent les activités faibles (bleu=0) et les couleurs chaudes les activités fortes (rouge=max). A titre de comparaison, une flèche magenta indique la position du dipôle fixe estimé par moindres carrés expliquant au mieux les sources (cf. 5.1). Cette technique de reconstruction se trouvant être particulièrement efficace dans le cas de sources focales dont le nombre (ici, 1) est connu à l'avance, nous l'utilisons comme référence visuelle.

Nous n'exposons ici que la solution inverse de variation totale minimale, les autres algorithmes fournissant le même type d'image pour ce cas. La variante utilisée utilise le pas optimal pour  $J_{\text{data}}$  avec  $\lambda = 10^{-6}$ . La variance résiduelle pour chacune des reconstructions était comprise entre 3% et 6%. Nous ne dressons, de plus, aucune quantification de la précision de la reconstruction obtenue par rapport aux dipôles de référence. Ces derniers n'étant pas soumis à une contrainte anatomique, on peut observer que leur position s'éloigne parfois de la surface du cortex.

On observe une correspondance satisfaisante entre les dipôles de référence et les sources reconstruites.

Dans la mesure où les méthodes que nous proposons sont très peu adaptées à la reconstruction de sources ponctuelles, nous nous contentons de cette vérification visuelle.

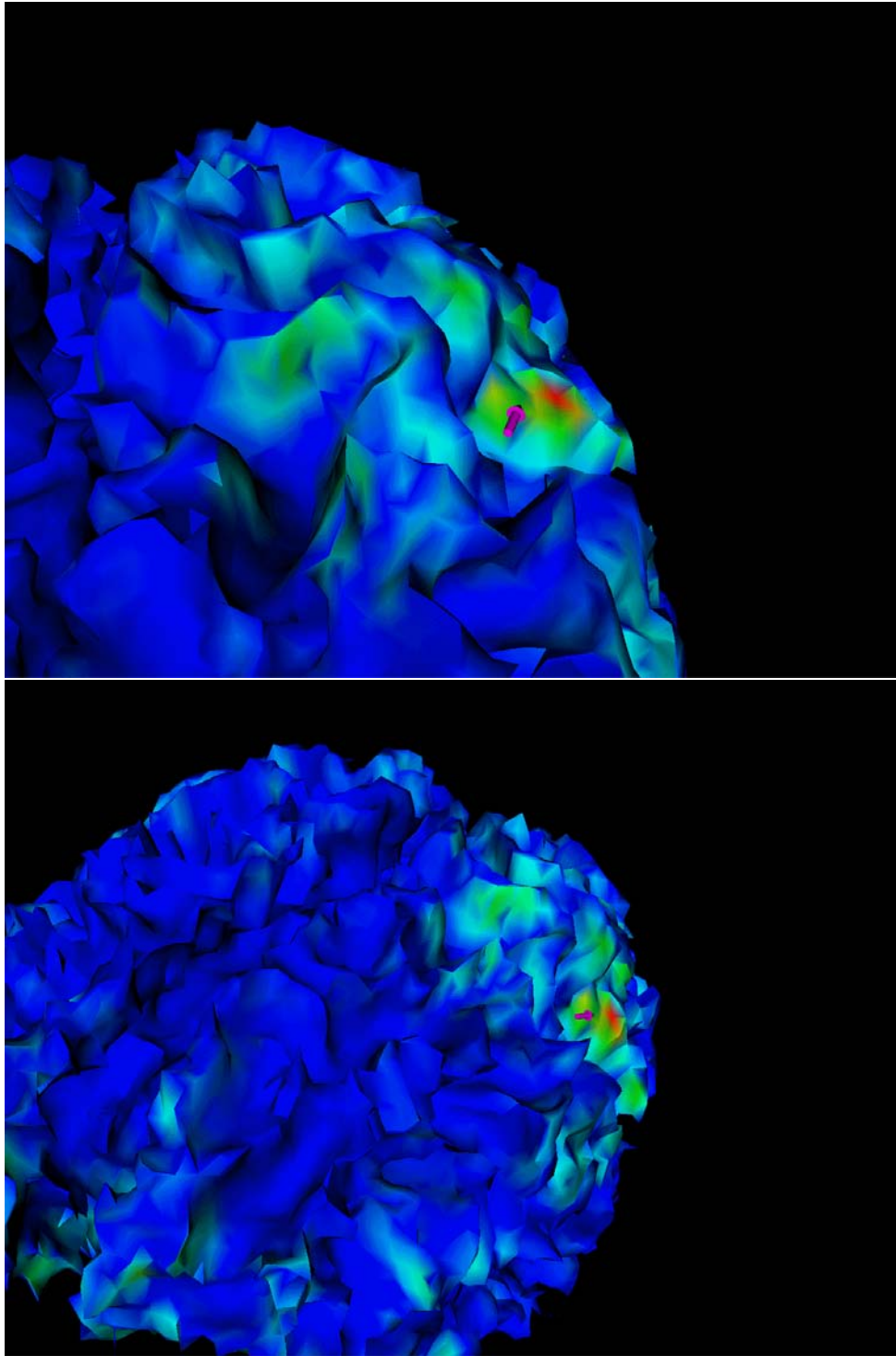


FIG. 8.5 – Problème inverse par variation totale minimale sur l'expérience de somatotopie. Stimulation de l'index.

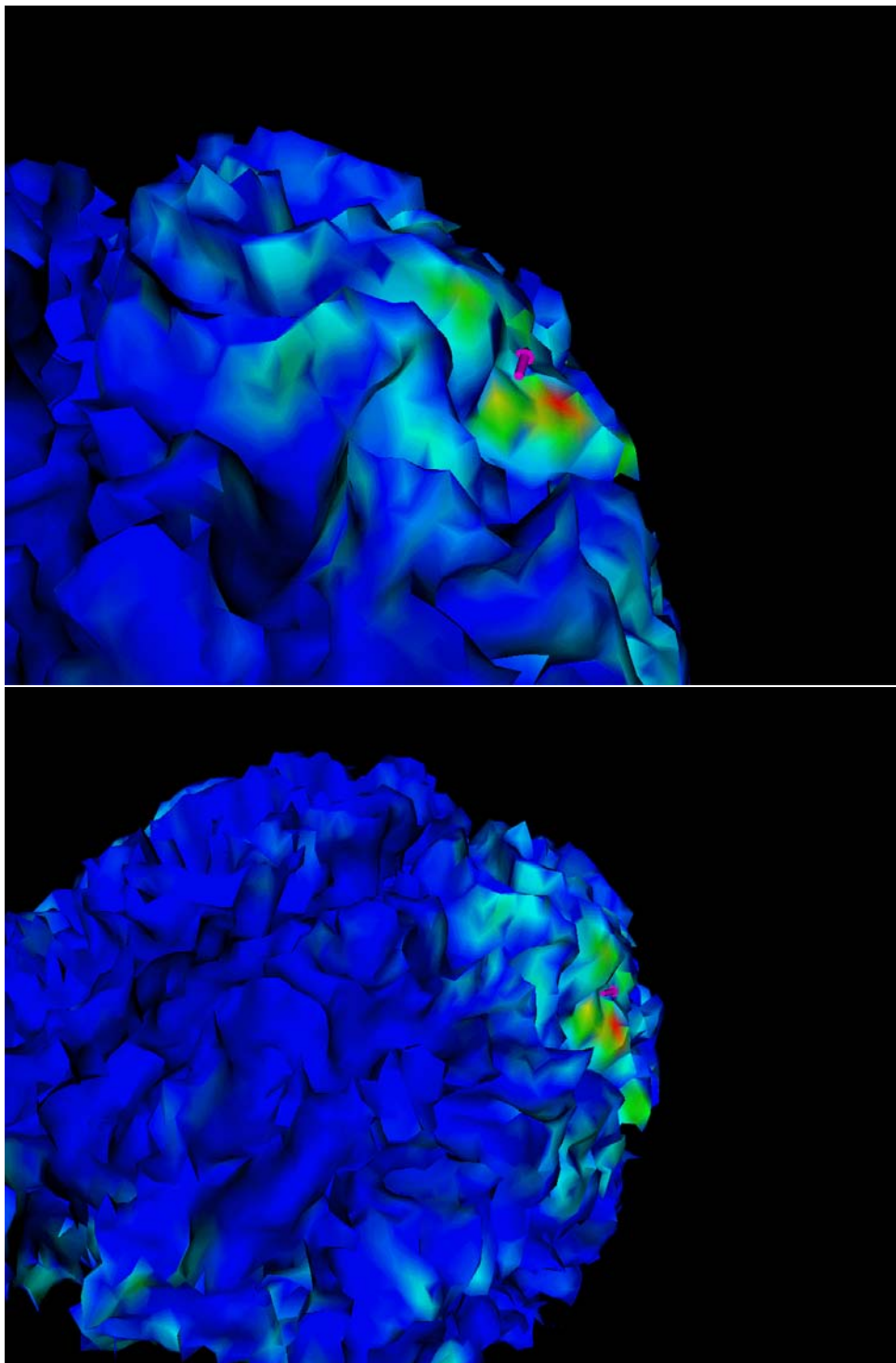


FIG. 8.6 – Problème inverse par variation totale minimale sur l'expérience de somatotopie. Stimulation du majeur.

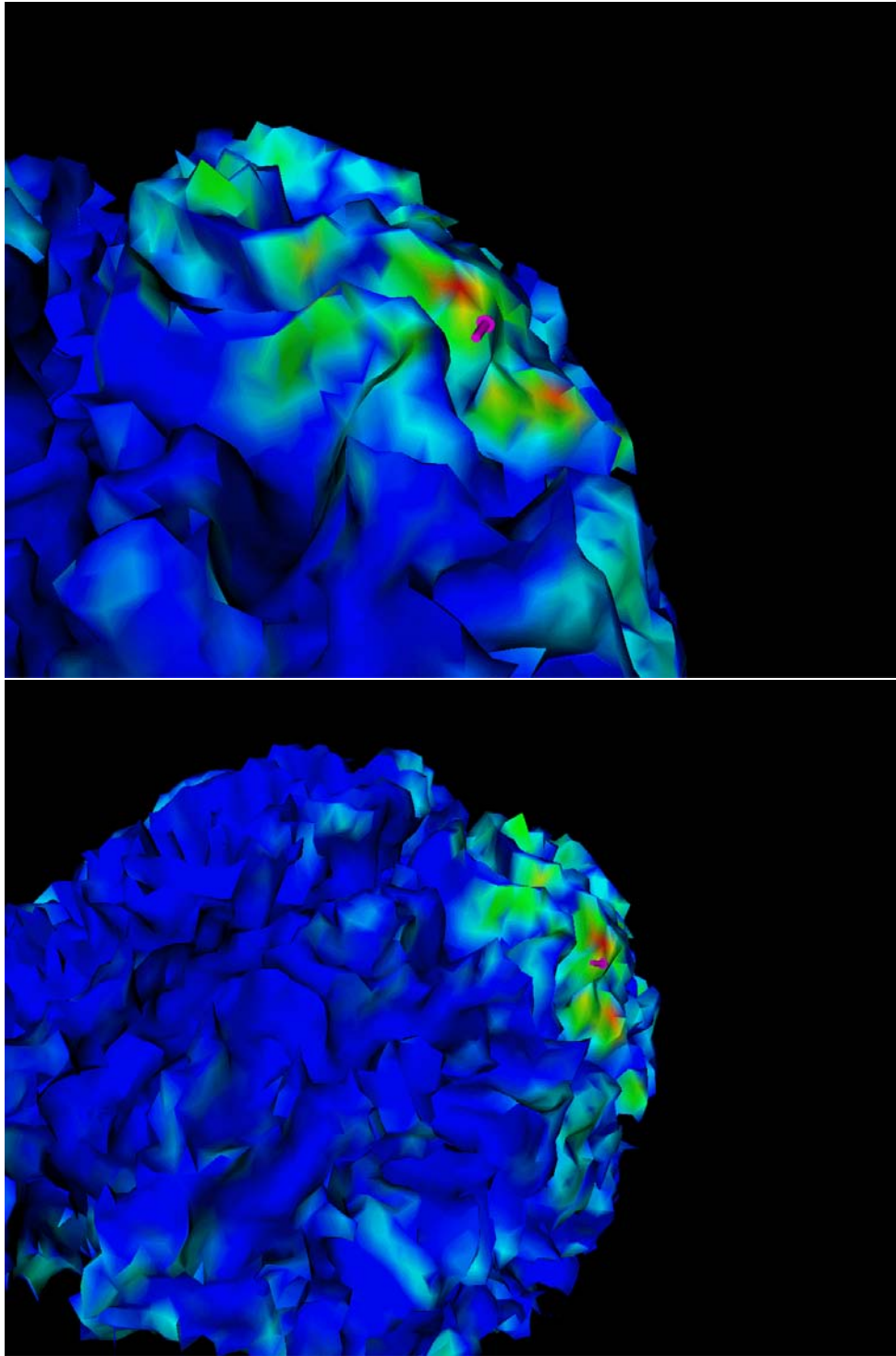


FIG. 8.7 – Problème inverse par variation totale minimale sur l'expérience de somatotopie. Stimulation de l'annulaire.



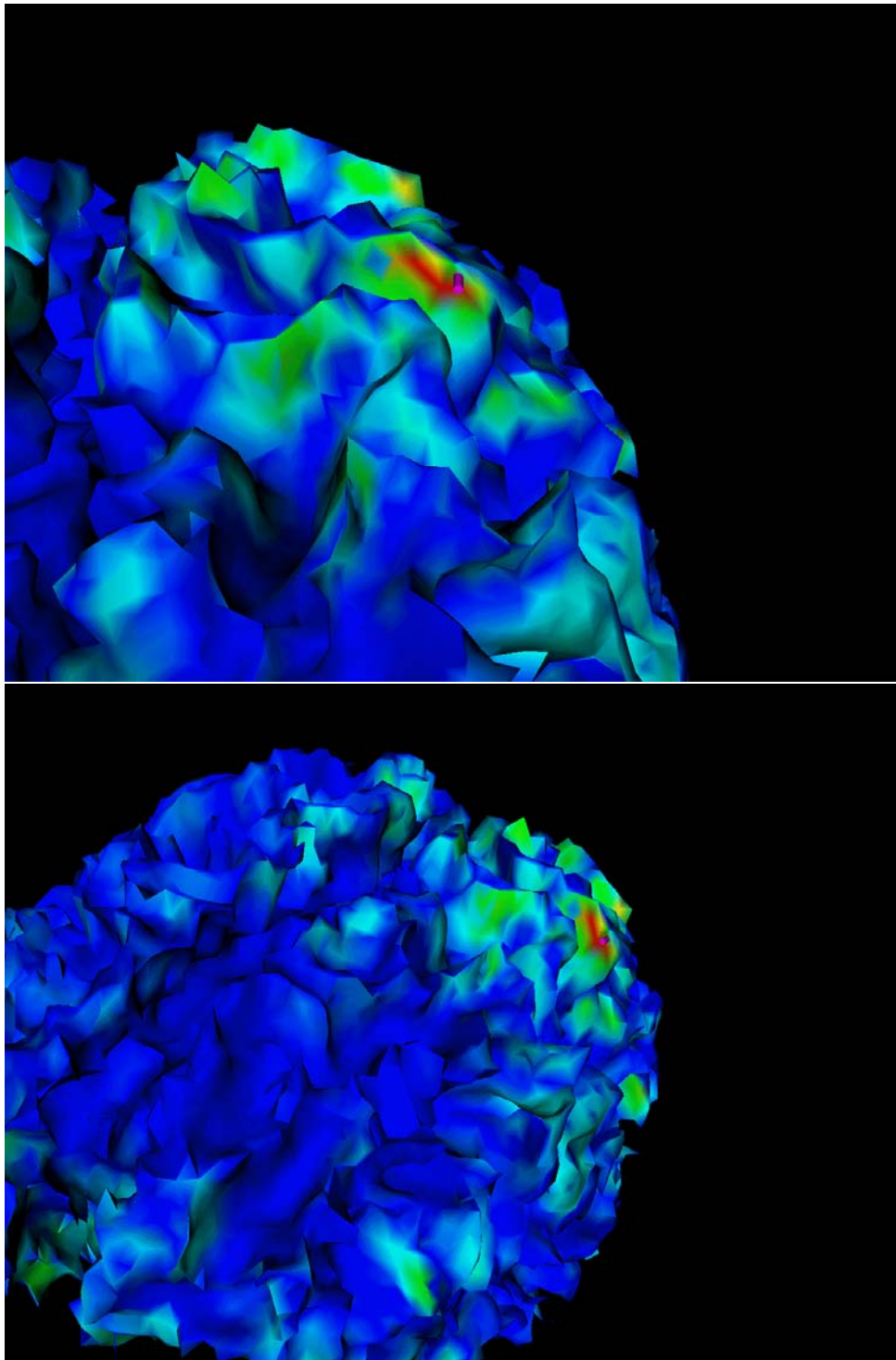


FIG. 8.8 – Problème inverse par variation totale minimale sur l'expérience de somatotopie. Stimulation de l'auriculaire.



---

# Chapitre 9

## Discussion

Nous avons transposé des techniques de restauration d'image au problème inverse en MEEG. Nous avons proposé deux discrétisations adaptées à la régularisation du problème inverse par toute une classe de processus de diffusion. S'en suivent essentiellement deux types d'algorithmes :

- un algorithme de type Newton fonctionnant avec la majeure partie de ces processus (ceux pour lesquels la fonction  $\phi$  est  $C^2$  et strictement convexe).
- des algorithmes bien plus lents de type gradient fonctionnant également sur les reconstructions de variation totale minimale.

Les expérimentations numériques ont porté sur la première catégorie d'algorithmes uniquement avec  $\phi(x) = x^2$  et sur la seconde catégorie d'algorithmes avec  $\phi(x) = x$ .

Ce dernier type d'algorithme s'est clairement distingué par sa capacité à reconstruire des sources étendues et multiples en comparaison au premier type et à la solution de norme minimale.

Par manque de temps, il n'a pas été possible de mener des expériences numériques semblables sur l'algorithme de type Newton avec les fonctions  $\phi$  du tableau (6.7). Il serait peut-être possible de trouver une version dégradée de la méthode TV qui présenterait un aspect qualitatif proche de cette dernière avec un coût plus comparable à celui des méthodes linéaires. Cela constitue indéniablement une dernière étape manquante, indispensable à la conclusion de ces travaux.

D'autre part, la résolution temporelle de la MEG et de l'EEG sont les points forts de ces deux modalités d'imagerie fonctionnelle cérébrale vis à vis de leurs concurrentes. Le travail que nous avons exposé n'en tire pas profit.

Un prolongement naturel de ces travaux résiderait donc dans l'utilisation d'un a priori temporel. Pour  $T$  échantillons temporels, la source  $S = [\underline{\mathbf{s}}_1, \dots, \underline{\mathbf{s}}_T]$  recherchée correspondrait au minimum de

$$J(S) = \sum_{i=1}^T \left( \frac{1}{2} \|\mathbf{H} \underline{\mathbf{s}}_i - \underline{\mathbf{m}}_i\|^2 + \lambda' \frac{1}{2} \|\underline{\mathbf{s}}_{i+1} - \underline{\mathbf{s}}_i\|^2 + \lambda J_{\text{smooth}}(\underline{\mathbf{s}}_i) \right)$$

avec, par convention,  $\underline{\mathbf{s}}_{T+1} = \underline{\mathbf{s}}_T$ .

Le coefficient  $\lambda'$  contrôle la régularité temporelle et le coefficient  $\lambda$ , la régularité spatiale de la solution.

Malheureusement, il n'a pas été possible d'investir cette voie de recherche à l'aide des algorithmes décrits dans ce travail.

Cela est essentiellement dû à la lourdeur des calculs nécessaires à la reconstruction d'une

source à un instant donné. A titre d'exemple, pour le modèle de tête utilisé dans les expériences synthétiques, chaque reconstruction de variation totale minimale nécessite entre 10 et 20 minutes de calcul. Pour une fréquence d'échantillonnage de 1KHz, le temps de calcul nécessaire à la reconstruction d'une séquence temporelle est donc 600000 fois supérieure à la durée de cette séquence. Cela représente environ une semaine de calcul pour une séquence d'une seconde. Ce coût est tout simplement prohibitif.

Pour remédier à ce problème, nous proposons, dans ce qui suit, plusieurs axes de recherche.

La transposition des méthodes de restauration d'image au problème inverse nous mène tout naturellement à envisager une approche multirésolution. Contrairement au cas des images planes, l'obtention d'image multirésolution sur des surface n'est pas instantanée. Il faut tenir compte, à la fois, de la géométrie du support et de la résolution désirée. Cela peut être fait par l'utilisation de maillages hiérarchiques. L'obtention de tels maillages relève d'une problématique propre à laquelle nous ne nous sommes pas confrontés.

Une autre voie vers des algorithmes rapides consisterait à comprendre la nature de la divergence observée en 7.3.2 lorsque l'on tente d'utiliser l'algorithme de Newton avec une suite de fonctions appropriées pour approximer la solution de variation totale. Une approche mathématiquement plus rigoureuse de la même idée est décrite dans [20] et [22] et reprise dans [7]. Cette approche aboutit à un algorithme semi-quadratique nommé AR-TUR. La convergence d'un tel algorithme est garantie, dans le cas des images planes, pour une fonction  $\phi$  strictement convexe. Cela n'englobe pas le cas de la variation totale dans le cadre continu mais cette approche pourrait ouvrir la voie à des méthodes qualitativement comparables mais plus rapides. Ces travaux nécessitent notamment le calcul de la quantité  $\nabla \cdot (b \nabla s)$  où  $s$  et  $b$  sont deux images. Pour que ce terme puisse être calculé pour notre problème et afin qu'il garde un sens, il pourrait s'avérer nécessaire de discrétiser l'approche symétrique du problème direct en P2/P1 au lieu de P1/P0.  $s$  serait alors discrétisée sur une base P2 et  $b$  sur une base P1. La divergence serait alors prise sur la fonction linéaire par morceaux  $b \nabla s$ , nous éloignant ainsi du cadre embarrassant des distributions auquel mènerait la discrétisation P1/P0 utilisée dans le présent rapport.

Un effort complémentaire devrait également être produit concernant la résolution du système intervenant dans l'algorithme de Newton. Dans les travaux exposés (ainsi que dans la précédente suggestion), la matrice à inverser possède une structure très particulière : elle s'écrit comme la somme d'une matrice de covariance et d'une matrice très creuse. Une approche à base de SVD [45] et de décomposition de matrice creuse [51] permettrait probablement de "pré-inverser", en un sens qui resterait à définir, la matrice de ce système. Après un pré-calcul<sup>1</sup>, la résolution de chaque système de l'algorithme de Newton ou d'un algorithme semi-quadratique serait alors beaucoup plus rapide.

Bien entendu, le problème inverse de variation totale minimale que nous avons présenté ne sera jamais aussi rapide que des méthodes linéaires telles que les solutions de norme minimale ou de norme du gradient minimale. Par conséquent, un effort sur la parallélisation des algorithmes devra probablement être fait pour permettre de calculer des solutions inverses de variation totale minimale sur toute une fenêtre temporelle.

Les problèmes importants que nous avons soulevés en 8.1 concernant la segmentation des IRM anatomiques et la constitution de maillages de modèles de tête réalistes nous paraissent également cruciaux pour un éventuel prolongement de ces travaux. Il nous paraît

<sup>1</sup>probablement beaucoup plus rentable que l'inversion itérative, comme pour le problème direct



notamment souhaitable de disposer, à terme, d'un logiciel fiable disposant des aptitudes et fonctionnalités suivantes :

1. une segmentation fiable de la surface du cortex et de l'interface matière grise - matière blanche.
2. une segmentation fiable de la couche osseuse du crâne
3. une gestion intuitive et fonctionnelle des différents repères employés : repère du patient, repère de l'IRM avec ou sans origine, etc ... . Cela va de pair avec la gestion de nombreux formats de fichiers tant pour les images anatomiques que pour les maillages.
4. un mailleur capable de générer des maillages adaptés à la BEM. Les maillages générés ne doivent pas se contenter de capturer l'information géométrique des surfaces en question, ils doivent les représenter avec une densité constante de triangles de tailles voisines et les plus équilatéraux possibles. Cela impacte de manière immédiate le conditionnement de la matrice du problème direct ainsi que la précision potentielle des images d'activation reconstruites. Toujours pour satisfaire aux exigences de la BEM, ce mailleur devrait être capable de contrôler la topologie des triangulations qu'il génère et de garantir certaines contraintes sur celles-ci. Dans notre cas par exemple, l'ensemble des triangulations générées devrait présenter une topologie sphérique. De plus, aucune intersection ne doit être permise entre elles et une distance minimale doit pouvoir être imposée entre les maillages des différentes interfaces afin de garantir la précision du problème direct et donc du problème inverse.

La possibilité de générer des maillages hiérarchiques serait un plus notable qui donnerait accès à des méthodes multirésolutions qui permettraient d'accélérer notablement le problème inverse.

5. un déraffineur capable d'abaisser la résolution des triangulations tout en respectant les contraintes de topologie et de distance imposées lors du maillage des surfaces.

Le point 1 est spécialement bien géré par ABSOLUt alors que BrainSuite est une référence concernant le point 2. Le point 3 est délicat dans de nombreux logiciels, BrainVisa semble le plus polyvalent sur ce point. L'exigence 4 est, à notre sens, la plus importante. Elle n'est que très partiellement traitée, notamment par ABSOLUt et BrainSuite. Le premier garantit des triangulations à topologie sphérique grâce à l'utilisation de level sets topologiques[103] lors de la segmentation là où le deuxième corrige, avant maillage, la segmentation obtenue. La non-intersection est gérée lors de la segmentation dans les deux logiciels et seul ABSOLUt permet, à notre connaissance, de fixer une distance minimale entre les surfaces reconstruites. Le dernier point, quant à lui, ne semble être traité par aucun logiciel même dédié. L'ensemble de ces remarques ne concerne que les logiciels libres, les logiciels commerciaux tels que BESA [15], Curry [26] ou ASA [123, 6] n'ayant pu être utilisés.



---

## Annexes







---

## Annexe A

# Potentiels simple et double couche

Nos définissons ici les potentiels simple et double couche et nous en donnons quelques propriétés intuitives. De plus amples information peuvent être trouvées dans [88].

Le *potentiel simple couche* est donné par la formule :

$$u_s(\mathbf{r}) = \int_{\partial\Omega} G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \xi(\mathbf{r}') ds(\mathbf{r}') \quad (\text{A.1})$$

$u_s$  est le potentiel crée par une densité surfacique de charge  $\xi$  répartie sur la surface  $\partial\Omega$ .

Le *potentiel double couche* est donné par la formule :

$$u_d(\mathbf{r}) = \int_{\partial\Omega} \partial_{\mathbf{n}'} G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \mu(\mathbf{r}') ds(\mathbf{r}'). \quad (\text{A.2})$$

$u_d$  est le potentiel crée par une densité surfacique dipolaire  $\mu$  répartie sur la surface  $\partial\Omega$  dont le moment est perpendiculaire à cette surface en tout point.

Ces deux potentiels vérifient l'équation de Laplace  $\Delta u = 0$  dans  $\Omega \cup \Omega^c$  ainsi que l'hypothèse  $\mathcal{H}$ . Les opérateurs  $\xi \rightarrow u_s$  et  $\mu \rightarrow u_d$  ont également la propriété commune d'être régularisants : à une fonction de  $C^0(\partial\Omega)$ , ils associent tous deux une fonction harmonique de  $C^2(\Omega \cup \Omega^c)$ .

Le potentiel de simple couche est continu par rapport à  $\mathbf{r}$ , en particulier à la traversée de l'interface  $\partial\Omega$ . En contre-partie, sa dérivée normale est discontinue à la traversée de  $\partial\Omega$ . Le calcul de ses valeurs limites de part et d'autre de la surface peut être trouvé dans [88]. Ces valeurs valent :

$$p_{\mathbf{n}}^{\pm}(\mathbf{r}) = \partial_{\mathbf{n}} u^{\pm}(\mathbf{r}) = \mp \frac{\xi(\mathbf{r})}{2} + \int_{\partial\Omega} \partial_{\mathbf{n}} G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \xi(\mathbf{r}') ds(\mathbf{r}') \quad \text{pour } \mathbf{r} \in \partial\Omega \quad (\text{A.3})$$

Le potentiel de double couche possède la propriété duale. Il présente une discontinuité à la traversée de la surface  $\partial\Omega$  dont les valeurs limites sont :

$$u^{\pm}(\mathbf{r}) = \pm \frac{\mu(\mathbf{r})}{2} + \int_{\partial\Omega} \partial_{\mathbf{n}'} G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \mu(\mathbf{r}') ds(\mathbf{r}') \quad \text{pour } \mathbf{r} \in \partial\Omega \quad (\text{A.4})$$

Sa dérivée normale, quant à elle, y est continue. On considère la dérivée de A.4 par rapport à  $\mathbf{r}$  dans la direction  $\mathbf{n}$  :

$$p(\mathbf{r}) = p_{\mathbf{n}}(\mathbf{r}) = \partial_{\mathbf{n}} u(\mathbf{r}) = \int_{\partial\Omega} \partial_{\mathbf{n}, \mathbf{n}'}^2 G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \mu(\mathbf{r}') ds(\mathbf{r}') . \quad (\text{A.5})$$

Notons bien que le noyau  $\partial_{\mathbf{n},\mathbf{n}'}^2 G(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$  n'est pas une fonction intégrable quand  $\mathbf{r}' \rightarrow \mathbf{r}$ . Il est donc nécessaire de traiter  $p$  comme une distribution. Ce n'est pas le cas pour  $[p]$  qui est bien continue sur  $\partial\Omega$ .

Une fois posées ces définitions le Théorème de représentation (1) peut se réinterpréter de la manière suivante :

Une fonction harmonique dans  $\Omega \cup \Omega^c$  peut se représenter sous la forme d'une somme d'un potentiel simple couche avec  $\xi = [p]$  et d'un potentiel de double couche  $\mu = -[u]$ .



---

## Annexe B

### Calcul des opérateurs $\mathcal{S}$ , $\mathcal{D}$ , $\mathcal{D}^*$ et $\mathcal{N}$

Nous détaillons ici le calcul des intégrales internes intervenant dans la discrétisation des opérateurs  $\mathcal{S}$  et  $\mathcal{D}$ , le calcul de  $\mathcal{D}^*$  s'en déduisant de manière immédiate par dualité. Nous exposons ensuite la formule permettant le calcul de  $\mathcal{N}$  à partir des valeurs de  $\mathcal{S}$ .

#### B.1 Calcul exact de quelques intégrales

Dans ce qui suit nous allons déterminer la valeur exacte de deux intégrales sur un triangle  $T$ . On note  $\mathbf{a}_1$ ,  $\mathbf{a}_2$  et  $\mathbf{a}_3$  les sommets du triangle  $T$ . Pour des raisons pratiques concernant les indices on pose  $\mathbf{a}_4 = \mathbf{a}_1$ . Le vecteur  $\mathbf{n}$  représente la normale au triangle  $T$ .  $\mathbf{q}$ , quant à lui, désigne un vecteur de  $\mathbb{R}^3$ . Nous utilisons également la convention suivante : tout symbole de vecteur indicé par la lettre  $T$  désigne la projection du vecteur sur le plan du triangle  $T$ . Par exemple,  $\mathbf{q}_T$  désigne la projection du vecteur  $\mathbf{q}$  sur le plan de  $T$ . (figure B.1)

Étant donné un point  $\mathbf{r}'$  du triangle  $T$ , nous définissons ses coordonnées barycentriques  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  et  $\lambda_3$  qui, pour rappel, vérifient  $\sum_{k=1}^3 \lambda_k = 1$  et  $\sum_{k=1}^3 \lambda_k \mathbf{a}_k = \mathbf{r}'$  :

$$\lambda_1(\mathbf{r}') = \frac{\det(\mathbf{r}', \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)}{\det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)}, \quad \lambda_2(\mathbf{r}') = \frac{\det(\mathbf{a}_1, \mathbf{r}', \mathbf{a}_3)}{\det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)}, \quad \lambda_3(\mathbf{r}') = \frac{\det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{r}')}{\det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)}$$

##### B.1.1 Préliminaires

###### Calcul de l'intégrale $\int_{[a,b]} \frac{dl(\mathbf{r}')}{\|\mathbf{r}' - \mathbf{r}_T\|}$ le long d'un segment

Pour traiter les intégrales suivantes, nous aurons besoin de calculer la valeur de l'intégrale de  $\frac{1}{\|\mathbf{r}' - \mathbf{r}_T\|}$  pour  $\mathbf{r}'$  variant le long d'une arête du triangle  $T$ . Dans ce qui suit on note  $\mathbf{a}$  et  $\mathbf{b}$  les extrémités de l'arête. De plus on définit  $\boldsymbol{\tau} = \frac{\mathbf{b} - \mathbf{a}}{\|\mathbf{b} - \mathbf{a}\|}$  le vecteur unitaire tangent au vecteur  $\mathbf{b} - \mathbf{a}$ . On définit alors  $0 \leq l \leq \|\mathbf{b} - \mathbf{a}\|$  de telle sorte que :

$$\mathbf{r}' - \mathbf{r}_T = \mathbf{a} - \mathbf{r}_T + l\boldsymbol{\tau}$$

Et  $0 \leq \theta \leq \pi$ , l'angle entre  $(\mathbf{a} - \mathbf{r}_T)$  et  $\boldsymbol{\tau}$  :

$$(\mathbf{a} - \mathbf{r}_T) \cdot \boldsymbol{\tau} = \|\mathbf{a} - \mathbf{r}_T\| \cos \theta$$

On écrit la relation

$$\|\mathbf{r}' - \mathbf{r}_T\|^2 = \|\mathbf{a} - \mathbf{r}_T + l\boldsymbol{\tau}\|^2 = \|\mathbf{a} - \mathbf{r}_T\|^2 + 2\|\mathbf{a} - \mathbf{r}_T\|l \cos \theta + l^2$$

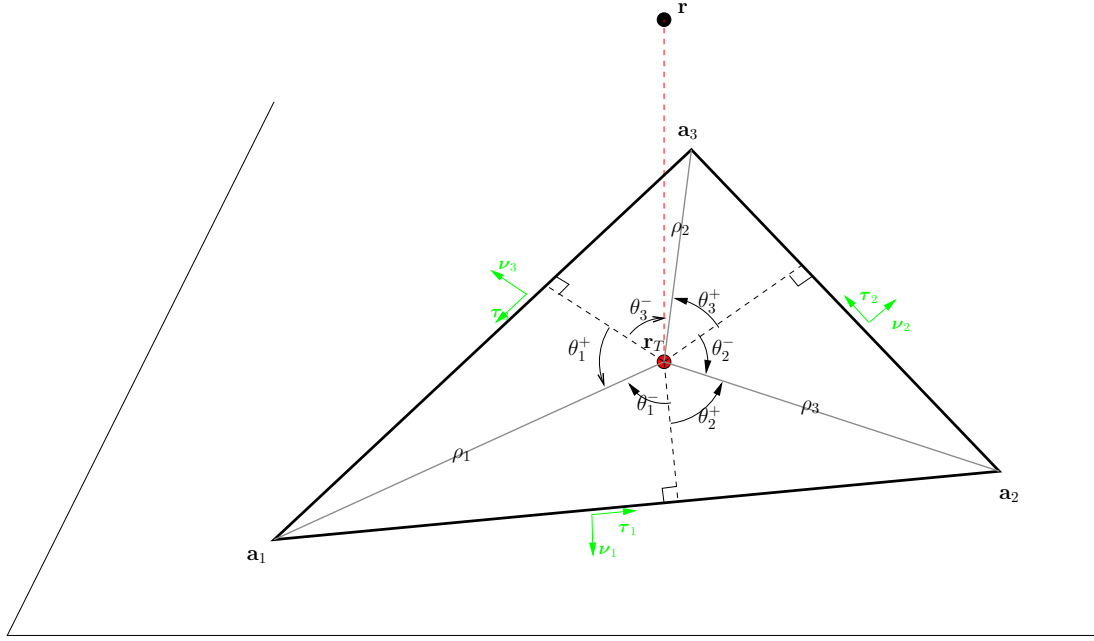


FIG. B.1 – Projection de  $r$  dans le plan du triangle. Dans un soucis de clarté,  $r_T$  est, sur la figure, dans le triangle  $T$ . Ce n'est pas systématique.

On définit la variable  $\phi$  par :

$$l + \|\mathbf{a} - \mathbf{r}_T\| \cos \theta = \|\mathbf{a} - \mathbf{r}_T\| \sin \theta \sinh \phi$$

Ce qui revient à écrire tant que  $\theta \neq 0$  et  $\theta \neq \pi$  :

$$\cosh \phi = \sqrt{1 + \sinh^2 \phi} = \frac{\|\mathbf{r}' - \mathbf{r}_T\|}{\|\mathbf{a} - \mathbf{r}_T\| \sin \theta}$$

Et dans ce cas on procède au changement de variable  $l \rightarrow \phi$  et on obtient :  $\frac{dl(\mathbf{r}')}{\|\mathbf{r}' - \mathbf{r}_T\|} = d\phi$

$$\frac{dl(\mathbf{r}')}{\|\mathbf{r}' - \mathbf{r}_T\|} = d\phi$$

On utilise ensuite la relation  $\phi = \log(\cosh \phi + \sinh \phi)$  qui après calcul mène à :

$$d\phi = d \log(|\mathbf{r}' - \mathbf{r}_T| + (\mathbf{r}' - \mathbf{r}_T) \cdot \boldsymbol{\tau})$$

Ce qui en réinjectant dans l'intégrale à évaluer donne :

$$\int_{[\mathbf{a}, \mathbf{b}]} \frac{dl(\mathbf{r}')}{\|\mathbf{r}' - \mathbf{r}_T\|} = [\log(|\mathbf{r}' - \mathbf{r}_T| + (\mathbf{r}' - \mathbf{r}_T) \cdot \boldsymbol{\tau})]_{\mathbf{r}'=\mathbf{a}}^{\mathbf{r}'=\mathbf{b}} \quad (\text{B.1})$$

Lorsque  $\theta = 0$  ou  $\theta = \pi$ , les points  $\mathbf{r}_T$ ,  $\mathbf{a}$  et  $\mathbf{b}$  sont alignés. Le calcul est alors plus immédiat et on obtient :

$$\int_{[\mathbf{a}, \mathbf{b}]} \frac{dl(\mathbf{r}')}{\|\mathbf{r}' - \mathbf{r}_T\|} = \log\left(\frac{M}{m}\right) \quad (\text{B.2})$$

avec  $M = \max(\|\mathbf{r}_T - \mathbf{a}\|, \|\mathbf{r}_T - \mathbf{b}\|)$  et  $m = \min(\|\mathbf{r}_T - \mathbf{a}\|, \|\mathbf{r}_T - \mathbf{b}\|)$

## Calcul de l'angle solide sous lequel est vu un triangle depuis un point donné

Dans la suite de cette annexe, nous aurons besoin d'évaluer une seconde quantité. Il s'agit de l'angle solide  $\Omega_T(\mathbf{r})$  sous lequel est vu un triangle  $T$  depuis un point  $\mathbf{r}$ . Cet angle solide est donné par la valeur de l'intégrale.

$$\int_{\mathbf{r}' \in T} \frac{ds(\mathbf{r}')}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|^3}$$

Pour évaluer cette quantité, on sépare l'intégrale sur  $T = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$  en trois termes sur chacun des triangles  $(\mathbf{r}_T, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$ ,  $(\mathbf{r}_T, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$  et  $(\mathbf{r}_T, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_1)$ . Pour un triangle donné, on note  $\mathbf{r}'_T$  la projection de  $\mathbf{r}_T$  sur le coté opposé et  $\rho_0 = \|\mathbf{r}_T - \mathbf{r}'_T\|$ . On peut alors écrire :

$$\mathcal{K}_i = \int_{\mathbf{r}' \in (\mathbf{r}_T, \mathbf{a}_i, \mathbf{a}_{i+1})} \frac{ds(\mathbf{r}')}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|^3} = \int_{\theta=\theta_i}^{\theta_{i+1}} \int_{\rho=0}^{\rho_0/\cos\theta} \frac{d}{(d^2 + \rho^2)^{3/2}} \rho d\rho d\theta$$

où  $\theta_i$  est l'angle entre les vecteurs  $\mathbf{r}_T \mathbf{r}'_T$  et  $\mathbf{r}_T \mathbf{a}_i$ ,  $\theta_{i+1}$  l'angle entre les vecteurs  $\mathbf{r}_T \mathbf{r}'_T$  et  $\mathbf{r}_T \mathbf{a}_{i+1}$  (avec la convention  $\mathbf{a}_4 = \mathbf{a}_1$ ) et  $d = \|\mathbf{r} - \mathbf{r}_T\|$ .

Pour les termes  $\mathcal{K}_i$ , une intégration analytique est possible :

$$\int_{\rho=0}^{\rho_0/\cos\theta} \frac{d}{(d^2 + \rho^2)^{3/2}} \rho d\rho = 1 - \frac{d}{\sqrt{d^2 + \rho_0^2/\cos^2\theta}}$$

On procède ensuite au changement de variable  $t = \tan\theta$ . Ce qui donne :

$$\mathcal{K}_i = \int d\theta - \int \frac{d}{(1+t^2)\sqrt{d^2 + \rho_0^2 + \rho_0^2 t^2}} dt$$

Une primitive de  $\frac{\alpha}{(1+t^2)\sqrt{1+\alpha^2+t^2}}$  étant  $\arctan \frac{\alpha t}{\sqrt{1+\alpha^2+t^2}}$ , on a :

$$\mathcal{K}_i = \left[ \theta - \arctan \frac{d \tan \theta}{\sqrt{d^2 + \rho_0^2 + \rho_0^2 \tan^2 \theta}} \right]_{\theta_i}^{\theta_{i+1}}$$

On remarque que  $\sqrt{d^2 + \rho_0^2 + \rho_0^2 \tan^2 \theta_i} = \|\mathbf{r} - \mathbf{a}_i\|$ . Cela donne le résultat :

$$\int_{\mathbf{r}' \in T} \frac{ds(\mathbf{r}')}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|^3} = \sum_{i=1}^3 \left[ \theta - \arctan \left( \frac{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_T\|}{\|\mathbf{r} - \mathbf{a}_i\|} \tan \theta \right) \right]_{\theta_i}^{\theta_{i+1}}$$

Une écriture plus synthétique de cette quantité a été donnée dans [115].

$$\int_{\mathbf{r}' \in T} \frac{ds(\mathbf{r}')}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|^3} = 2 \arctan \frac{\det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)}{\|\mathbf{a}_1\| \|\mathbf{a}_3\| \|\mathbf{a}_3\| + \|\mathbf{a}_1\| (\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}_3) + \|\mathbf{a}_2\| (\mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{a}_1) + \|\mathbf{a}_3\| (\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2)} \quad (\text{B.3})$$

### B.1.2 Calcul de l'intégrale nécessaire à la discrétisation de $\mathcal{D}$

Pour discrétiser  $\mathcal{D}$  dans l'approche symétrique, on cherche à calculer les quantités  $(\mathcal{D}_{kl})_{ij} = \langle \mathcal{D}_{k,l} \phi_j^{(l)}, \psi_i^{(k)} \rangle$  où  $\phi_j^{(l)}$  est la  $j^{\text{ème}}$  fonction de base P1 sur la surface triangulée  $S_l$  et  $\psi_i^{(k)}$  est la  $i^{\text{ème}}$  fonction de base P0 sur la surface triangulée  $S_k$ . Nous nous intéressons dans ce qui suit au calcul exact de  $\mathcal{D}_{k,l} \phi_j^{(l)}$ , l'intégration du produit scalaire ne pouvant

se faire de manière analytique.

L'intégrale à calculer est donc la suivante :

$$\int_{T=\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3} \nabla G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot \mathbf{n}' \phi_j^{(l)} ds(\mathbf{r}') \quad (\text{B.4})$$

La fonction test  $\phi_j^{(l)}$  peut s'écrire dans le triangle  $T$  sous la forme :  $\phi_j^{(l)}(\mathbf{r}) = \lambda_k(\mathbf{r})$  avec  $k = 1, 2$  ou  $3$ . Pour simplifier les notations nous nous plaçons dans le cas  $k = 1$ , les autres cas étant identiques. En détaillant l'écriture de  $\phi$ , on trouve :

$$\begin{aligned} \phi_j^{(l)}(\mathbf{r}) &= \frac{\det(\mathbf{r}', \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)}{\det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)} \\ &= \frac{\mathbf{r}' \cdot (\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3)}{\mathbf{a}_1 \cdot (\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3)} \\ &= \mathbf{r}' \cdot \mathbf{p} \quad \text{avec} \quad p = \frac{\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3}{\mathbf{a}_1 \cdot (\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3)} \end{aligned}$$

Parallèlement, on remarque que dans le triangle  $T$ ,  $\mathbf{n}'$  est constant. Le terme  $\nabla G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot \mathbf{n}'$  peut se ré-écrire :

$$\begin{aligned} \nabla G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot \mathbf{n}' &= \frac{1}{4\pi} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|^3} \cdot \mathbf{n}' \\ &= \frac{1}{4\pi} \frac{((\mathbf{r} - \mathbf{r}_T) + (\mathbf{r}_T - \mathbf{r}')) \cdot \mathbf{n}'}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|^3} \\ &= \frac{1}{4\pi} \frac{\|(\mathbf{r} - \mathbf{r}_T)\|}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|^3} \end{aligned}$$

En recombinaison les deux précédentes équations dans (B.4), l'intégrale à calculer se met sous la forme :

$$\frac{\|(\mathbf{r} - \mathbf{r}_T)\|}{4\pi} \int_{T=\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3} \frac{\mathbf{r}' \cdot \mathbf{p}}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|^3} ds(\mathbf{r}') \quad (\text{B.5})$$

Après quelque manipulations algébriques, l'intégrale de (B.5) peut se scinder en deux termes :

$$\int_{\mathbf{r}' \in T} \frac{\mathbf{r}' \cdot \mathbf{p}}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|^3} ds(\mathbf{r}') = \mathbf{r}_T \cdot \mathbf{p} \int_{\mathbf{r}' \in T} \frac{ds(\mathbf{r}')}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|^3} + \int_{\mathbf{r}' \in T} \frac{(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_T) \cdot \mathbf{p}_T}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|^3} ds(\mathbf{r}') \quad (\text{B.6})$$

Le premier de ces termes est égal à  $\frac{\mathbf{r}_T \cdot \mathbf{p}}{\pm \|\mathbf{r} - \mathbf{r}_T\|} \Omega_T(\mathbf{r})$ .  $\Omega_T(\mathbf{r})$  est l'angle solide sous lequel est vu le triangle  $T$  depuis le point  $\mathbf{r}$ . Il se calcule de manière analytique à l'aide la formule (B.3). Pour calculer l'intégrale du second terme, on se place dans une système de coordonnées locales dans le plan de  $T$ . Dans ce système on définit les coordonnées des vecteurs  $\mathbf{r}' - \mathbf{r}_T = [u', v']^T$  et  $\mathbf{p}_T = [\alpha', \beta']^T$ . On note  $r_T = \|\mathbf{r}_T\|$ . Par relation de Pythagore on a  $\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\| = \sqrt{u'^2 + v'^2 + r_T^2}$  et l'intégrale dans le second terme de (B.6) vaut :

$$\alpha' \iint_T \frac{u'}{(u'^2 + v'^2 + r_T^2)^{3/2}} du' dv' + \beta' \iint_T \frac{v'}{(u'^2 + v'^2 + r_T^2)^{3/2}} du' dv' \quad (\text{B.7})$$

Pour calculer ces intégrales, on utilise le théorème de Green. On remarque que

$$\text{div}_T \left( \frac{1}{(u'^2 + v'^2 + r_T^2)^{1/2}} \right) = - \frac{u'}{(u'^2 + v'^2 + r_T^2)^{3/2}}$$

et on a donc :

$$\iint_T \frac{u'}{(u'^2 + v'^2 + r_T^2)^{3/2}} du' dv' = - \int_{\partial T} \frac{\boldsymbol{\nu}_{u'}}{(u'^2 + v'^2 + r_T^2)^{1/2}} dl$$

où  $\boldsymbol{\nu}$  est la normale unitaire à l'arête du triangle  $T$  et  $\boldsymbol{\nu}_{u'}$  sa composante suivant  $u'$ . En additionnant les deux termes de (B.7) on obtient la second terme de la somme (B.6) :

$$\int_{\mathbf{r}' \in T} \frac{(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_T) \cdot \mathbf{p}_T}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|^3} ds(\mathbf{r}') = - \sum_{k=1}^3 (\boldsymbol{\nu}_k \cdot \mathbf{n}_T) \int_{\mathbf{a}_k \mathbf{a}_{k+1}} \frac{dl \mathbf{r}'}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|}$$

La conclusion découle ensuite de (B.1) et (B.2) qui permettent d'évaluer les intégrales du membre de droite de l'équation précédente. En notant  $\boldsymbol{\tau}_k$  le vecteur unitaire  $\frac{\mathbf{a}_{k+1} - \mathbf{a}_k}{\|\mathbf{a}_{k+1} - \mathbf{a}_k\|}$  (cf figure B.1), cela donne :

$$\int_{\mathbf{a}_k \mathbf{a}_{k+1}} \frac{dl(\mathbf{r}')}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} = \begin{cases} \log\left(\frac{M_k}{m_k}\right) & \text{si } \mathbf{r} \text{ et } \mathbf{a}_k \mathbf{a}_{k+1} \text{ sont colinéaires} \\ \left[ \log(\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\| + (\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot \boldsymbol{\tau}_k) \right]_{\mathbf{r}' = \mathbf{a}_k}^{\mathbf{r}' = \mathbf{a}_{k+1}} & \text{sinon} \end{cases}$$

avec  $M_k = \max(\|\mathbf{r}' - \mathbf{a}_{k+1}\|, \|\mathbf{r}' - \mathbf{a}_k\|)$  et  $m_k = \min(\|\mathbf{r}' - \mathbf{a}_{k+1}\|, \|\mathbf{r}' - \mathbf{a}_k\|)$ .

### B.1.3 Calcul de l'intégrale nécessaire à la discrétisation de $\mathcal{S}$

Dans l'approche symétrique, la discrétisation de  $\mathcal{S}$  nécessite le calcul des quantités  $(\mathcal{S}_{kl})_{ij} = \langle \mathcal{S}_{kl} \psi_j^{(l)}, \psi_i^{(k)} \rangle$ . Ces quantités font intervenir deux intégrations. La plus interne, celle du calcul de  $\mathcal{S}_{kl} \psi_j^{(l)}$ , peut se calculer de manière analytique et est l'objet de cette section. La seconde, celle du produit scalaire, est réalisée de manière numérique.

L'intégrale à calculer est :

$$\int_{T=\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3} G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \psi_j^{(l)} ds(\mathbf{r}') \quad (\text{B.8})$$

Les fonctions  $(\psi_j^{(l)})_j$  étant constantes sur chaque triangle du maillage de  $S_l$ , la quantité à évaluer est soit nulle soit égale à :

$$\frac{1}{4\pi} \int_{T=\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3} \frac{ds(\mathbf{r}')}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} \quad (\text{B.9})$$

Pour calculer cette intégrale, on la sépare en deux termes :

$$\int_T \frac{ds(\mathbf{r}')}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} = \int_T \left( \frac{1}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} + \frac{d^2}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|^3} \right) ds(\mathbf{r}') - \int_T \frac{d^2}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|^3} ds(\mathbf{r}') \quad (\text{B.10})$$

Un simple calcul montre que  $\nabla_T \frac{\mathbf{r}' - \mathbf{r}_T}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} = \frac{1}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} + \frac{d^2}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|^3}$ . Le premier terme de la décomposition (B.10) peut donc se calculer par une simple application du théorème de Green :

$$\begin{aligned} \int_T \left( \frac{1}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} + \frac{d^2}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|^3} \right) ds(\mathbf{r}') &= \int_{\partial T} \frac{(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_T) \cdot \boldsymbol{\nu}}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} ds(\mathbf{r}') \quad , \quad \boldsymbol{\nu} \text{ est la normale au contour de } T \\ &= \sum_{i=1}^3 \pm \text{dist}(\mathbf{r}_T, \partial T_i) \int_{\partial T_i} \frac{dl(\mathbf{r}')}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} \end{aligned}$$

Le terme  $\text{dist}(\mathbf{r}_T, \partial T_i)$  provient de la quantité  $(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_T) \cdot \boldsymbol{\nu}$  qui est constante lorsque  $\mathbf{r}'$  parcourt une arête de  $T$ . Le signe devant ce terme dépend de l'orientation de la normale  $\boldsymbol{\nu}$  au contour de  $T$ . Les intégrales le long des côtés de  $T$  peuvent s'écrire à l'aide des formules (B.1) et (B.2).

En remarquant que le second terme de la décomposition (B.10) est, à un coefficient près, l'angle solide du triangle  $T$  vu depuis le point  $\mathbf{r}$  (cf. B.1.1), on peut, en utilisant les notations introduites dans la figure B.1, écrire le résultat final :

$$\int_{T=\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3} \frac{ds(\mathbf{r}')}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} = \sum_{i=1}^3 \rho_i \log \frac{\|\mathbf{r} - \mathbf{a}_{i+1}\| + \rho_i \tan \theta_{i+1}}{\|\mathbf{r} - \mathbf{a}_i\| + \rho_i \tan \theta_i} - \Omega_T(\mathbf{r})d$$

## B.2 Relation entre $\mathcal{N}$ et $\mathcal{S}$

Nous débutons cette section par un théorème issu de [88].

**Théorème 6 (Formulation Variationnelle de  $\mathcal{N}$ )** Soient  $\phi_i^{(k)}$  et  $\phi_j^{(l)}$  deux fonctions P1 sur les maillages des surfaces  $S_k$  et  $S_l$ . On a l'égalité suivante :

$$(\mathbf{N}_{kl})_{ij} = \langle \mathcal{N}_{kl} \phi_j^{(l)}, \phi_i^{(k)} \rangle = \frac{1}{4\pi} \int_{S_k} \int_{S_l} \frac{\mathbf{curl}_{S_l} \phi_j^{(l)}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{curl}_{S_k} \phi_i^{(k)}(\mathbf{r}')}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} ds_l(\mathbf{r}) ds_k(\mathbf{r}')$$

avec  $\mathbf{curl}_S \phi = \frac{1}{\sqrt{\det g}} \left( \frac{\partial \phi}{\partial \xi_1} \mathbf{e}_2 - \frac{\partial \phi}{\partial \xi_2} \mathbf{e}_1 \right)$  où  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$  est une base du plan tangent à  $S$  et  $g$  est le tenseur de la métrique de  $S$ .

Dans ce qui suit nous exprimons grâce à ce théorème la quantité  $(\mathbf{N}_{kl})_{ij}$  en fonction des des valeurs de  $(\mathbf{S}_{kl})_{ab}$  pour certaines valeurs de  $a$  et  $b$ .

On considère une fonction P1  $\phi_j^{(l)}$  du maillage de  $S_l$  et une autre fonction P1  $\phi_i^{(k)}$  du maillage de  $S_k$ . La fonction  $\phi_j^{(l)}$  (resp.  $\phi_i^{(k)}$ ) vaut 1 au sommet  $j$  (resp.  $i$ ) du maillage de  $S_k$  (resp.  $S_l$ ) et est linéaire sur tous les triangles de ce maillage. Elle est donc non constamment nulle uniquement sur les triangles dont le sommet  $j$  (resp.  $i$ ) fait partie. On désigne par  $T_1^{(j)}, \dots, T_{m_j}^{(j)}$  (resp.  $\Gamma_1^{(i)}, \dots, \Gamma_{p_i}^{(i)}$ ) l'ensemble de ces triangles (cf. figure B.2). Sur chacun d'entre eux, la fonction  $\phi_j^{(l)}$  (resp.  $\phi_i^{(k)}$ ) s'exprime sous la forme  $\phi_j^{(l)}|_{T_\alpha^{(j)}}(\mathbf{r}) = \mathbf{v}_\alpha^{(j)} \cdot \mathbf{r}$  (resp.  $\phi_i^{(k)}|_{\Gamma_\beta^{(i)}}(\mathbf{r}) = \mathbf{w}_\beta^{(i)} \cdot \mathbf{r}$ ) moyennant un changement d'origine constant sur tout le triangle. En adoptant ces notations on peut écrire.

$$\langle \mathcal{N}_{kl} \phi_j^{(l)}, \phi_i^{(k)} \rangle = \int_{T_1^{(j)} \cup T_2^{(j)} \cup \dots \cup T_{m_j}^{(j)}} \int_{\Gamma_1^{(i)} \cup \Gamma_2^{(i)} \cup \dots \cup \Gamma_{p_i}^{(i)}} \frac{\mathbf{curl}_{S_l} \phi_j^{(l)}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{curl}_{S_k} \phi_i^{(k)}(\mathbf{r}')}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} ds_l(\mathbf{r}) ds_k(\mathbf{r}') \quad (\text{B.11})$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{m_j} \sum_{\beta=1}^{p_i} \int_{T_\alpha^{(j)}} \int_{\Gamma_\beta^{(i)}} \frac{\mathbf{curl}_{S_l}(\mathbf{v}_\alpha^{(j)} \cdot \mathbf{r}) \cdot \mathbf{curl}_{S_k}(\mathbf{w}_\beta^{(i)} \cdot \mathbf{r}')}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} ds_l(\mathbf{r}) ds_k(\mathbf{r}') \quad (\text{B.12})$$

On désigne par  $j'$  et  $j''$  les numéros des deux autres sommets du triangle  $T_\alpha^{(j)} = (j, j', j'')$ . On procède de même pour  $\Gamma_\beta^{(i)} = (i, i', i'')$ . De plus, nous faisons l'abus de notation consistant à assimiler le numéro d'un sommet d'un maillage et le point qu'il désigne. On note  $\mathbf{h}_j$  (resp.  $\mathbf{h}_i$ ) la projection du sommet numéro  $j$  (resp.  $i$ ) sur le coté opposé

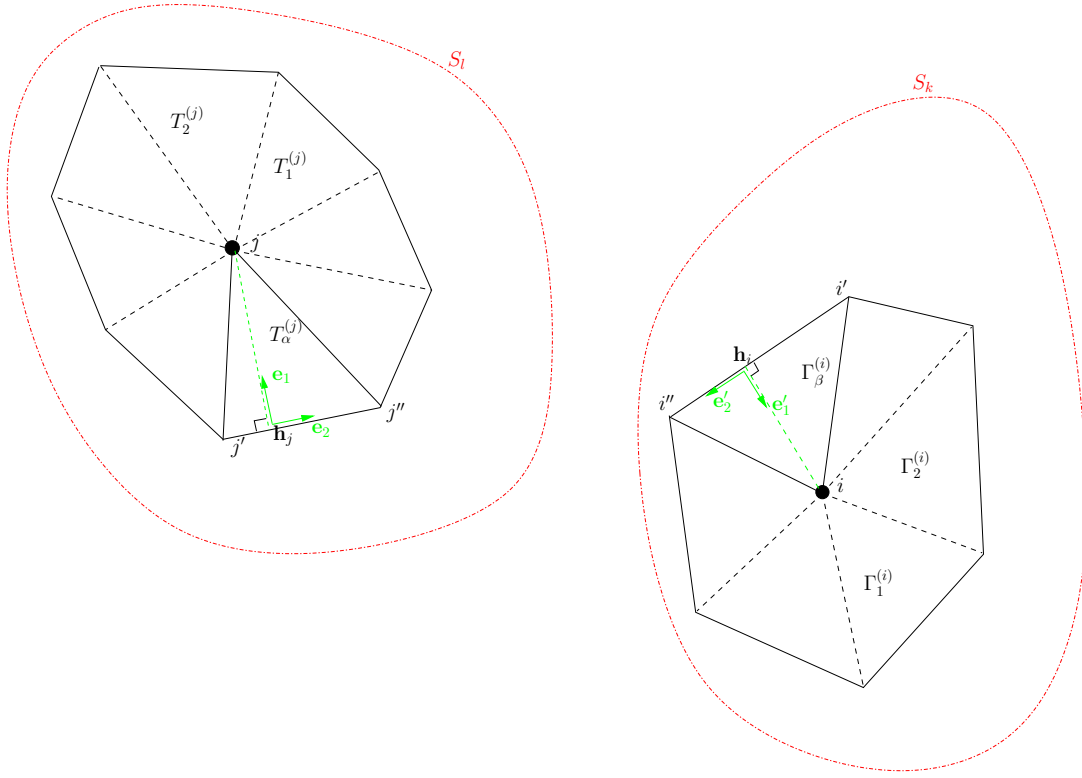


FIG. B.2 – Décomposition d'une fonction P1 sur les triangles adjacents.

dans le triangle  $T_\alpha^{(j)}$  (resp.  $\Gamma_\beta^{(i)}$ ). Un simple calcul permet de vérifier que  $\mathbf{v}_\alpha^{(j)} = \frac{j - \mathbf{h}_j}{\|j - \mathbf{h}_j\|^2}$  et  $\mathbf{w}_\beta^{(i)} = \frac{i - \mathbf{h}_i}{\|i - \mathbf{h}_i\|^2}$ . On forme une base orthonormée de  $T_\alpha^{(j)}$  : ( $\mathbf{e}_1 = \frac{j - \mathbf{h}_j}{\|j - \mathbf{h}_j\|}$ ,  $\mathbf{e}_2 = \frac{j'' - j'}{\|j'' - j'\|}$ ) et une base orthonormée de  $\Gamma_\beta^{(i)}$  : ( $\mathbf{e}'_1 = \frac{i - \mathbf{h}_i}{\|i - \mathbf{h}_i\|}$ ,  $\mathbf{e}'_2 = \frac{i'' - i'}{\|i'' - i'\|}$ ). Dans cette base on a :

$$\begin{aligned} \mathbf{curl}_{S_l}(\mathbf{v}_\alpha^{(j)} \cdot \mathbf{r}) &= \mathbf{curl}_{S_l}(\|\mathbf{v}_\alpha^{(j)}\| \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{r}) = -\frac{\mathbf{e}_2}{\|j - \mathbf{h}_j\|} = -\frac{j'' - j'}{\|j - \mathbf{h}_j\| \|j'' - j'\|} \\ \mathbf{curl}_{S_k}(\mathbf{w}_\beta^{(i)} \cdot \mathbf{r}') &= \mathbf{curl}_{S_k}(\|\mathbf{w}_\beta^{(i)}\| \mathbf{e}'_1 \cdot \mathbf{r}') = -\frac{\mathbf{e}'_2}{\|i - \mathbf{h}_i\|} = -\frac{i'' - i'}{\|i - \mathbf{h}_i\| \|i'' - i'\|} \end{aligned}$$

et donc

$$\mathbf{curl}_{S_l}(\mathbf{v}_\alpha^{(j)} \cdot \mathbf{r}) \cdot \mathbf{curl}_{S_k}(\mathbf{w}_\beta^{(i)} \cdot \mathbf{r}') = \frac{(j'' - j') \cdot (i'' - i')}{(\|j - \mathbf{h}_j\| \|j'' - j'\|)(\|i - \mathbf{h}_i\| \|i'' - i'\|)} = \mathbf{y}_\alpha^{(j)} \cdot \mathbf{z}_\beta^{(i)}$$

avec

$$\mathbf{y}_\alpha^{(j)} = \frac{j'' - j'}{2\mathcal{A}(T_\alpha^{(j)})} \quad \text{et} \quad \mathbf{z}_\beta^{(i)} = \frac{i'' - i'}{2\mathcal{A}(\Gamma_\beta^{(i)})}$$

En réinjectant ce résultat dans (B.12), on obtient le résultat recherché :

$$\langle \mathcal{N}_{kl} \phi_j^{(l)}, \phi_i^{(k)} \rangle = \sum_{\alpha=1}^{m_j} \sum_{\beta=1}^{p_i} \int_{T_\alpha^{(j)}} \int_{\Gamma_\beta^{(i)}} \frac{\mathbf{y}_\alpha^{(j)} \cdot \mathbf{z}_\beta^{(i)}}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} ds_l(\mathbf{r}) ds_k(\mathbf{r}') \quad (\text{B.13})$$

$$(\mathcal{N}_{kl})_{ij} = \sum_{\alpha=1}^{m_j} \sum_{\beta=1}^{p_i} (\mathbf{y}_\alpha^{(j)} \cdot \mathbf{z}_\beta^{(i)}) (S_{kl})_{a_\alpha^j b_\beta^i} \quad (\text{B.14})$$

$a_\alpha^j$  (resp.  $b_\beta^i$ ) désignant le numéro du triangle  $T_\alpha^{(j)}$  (resp.  $\Gamma_\beta^{(i)}$ ) dans la triangulation de  $S_l$  (resp.  $S_k$ ).





---

## Annexe C

# Calcul du gradient et de la hessienne de $J_{\text{smooth}}$

Afin d'éviter toute perte de précision lors de l'implémentation de la fonctionnelle  $J_{\text{smooth}}$ , on conserve la discrétisation initiale de la distribution source  $s$ . Dans cette annexe, nous rappelons cette discrétisation et nous calculons le gradient et la Hessienne de cette fonctionnelle discrétisée.

### C.1 Calcul du gradient

On utilise la forme (7.8) de l'énergie pour le calcul du gradient. Une application directe des règles de dérivation de fonctions composée donne :

$$\nabla J_{\text{smooth}}(x) = Q^T \begin{bmatrix} \frac{[Qx]_1}{|[Qx]_1|} \phi'(|[Qx]_1|) A_1 \\ \vdots \\ \frac{[Qx]_{n_T}}{|[Qx]_{n_T}|} \phi'(|[Qx]_{n_T}|) A_{n_T} \end{bmatrix} \quad (\text{C.1})$$

Il est important de noter qu'il ne s'agit pas d'une discrétisation du gradient exact de  $J_{\text{smooth}}$  mais plutôt du gradient exact de la discrétisation (7.8). Ainsi le calcul de la dérivée numérique de (7.8) coïncide avec la quantité (C.1).

### C.2 Calcul de la Hessienne

En posant  $z_i = [Qx]_i$  pour  $1 \leq i \leq n_T$  (C.1) se réécrit :

$$\nabla J_{\text{smooth}}(x) = Q^T \begin{bmatrix} \frac{z_1}{|z_1|} \phi'(|z_1|) A_1 \\ \vdots \\ \frac{z_{n_T}}{|z_{n_T}|} \phi'(|z_{n_T}|) A_{n_T} \end{bmatrix} = Q \underline{a} \quad (\text{C.2})$$

Etant donné que la matrice  $Q$  ne dispose que de trois entrées non nulles par ligne dont nous notons  $j_1^{(k)}$ ,  $j_2^{(k)}$  et  $j_3^{(k)}$  les numéros des colonnes, on définit les trois vecteurs de  $\mathbb{R}^3$

$$q_1^{(k)} = \mathbf{a}_{j_1^{(k)}}^k, \quad q_2^{(k)} = \mathbf{a}_{j_2^{(k)}}^k \quad \text{et} \quad q_3^{(k)} = \mathbf{a}_{j_3^{(k)}}^k$$

tels que

$$z_k = x(j_1^{(k)}) q_1^{(k)} + x(j_2^{(k)}) q_2^{(k)} + x(j_3^{(k)}) q_3^{(k)}$$

On calcule la quantité  $\frac{\partial}{\partial x_i}[\underline{a}]_k$ .

$$\frac{\partial}{\partial x_i}[\underline{a}]_k = \begin{cases} 0 & \text{pour } i \notin \{j_1^{(k)}, j_2^{(k)}, j_3^{(k)}\} \\ \left[ \phi''(|z_k|) \frac{z_k \cdot q_l^{(k)}}{|z_k|^2} z_k - \phi'(|z_k|) \frac{z_k \cdot q_l^{(k)}}{|z_k|^3} z_k + \phi'(|z_k|) \frac{1}{|z_k|} q_l^{(k)} \right] A_k & \text{pour } i = j_l^{(k)} \end{cases} \quad (\text{C.3})$$

Finalement comme  $Q$  est un opérateur linéaire on a :

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(\nabla J_{\text{smooth}})(x) = \frac{\partial}{\partial x_i} [Q^T \underline{a}] = Q^T \frac{\partial}{\partial x_i} \underline{a} \quad (\text{C.4})$$

En pratique, le calcul de la hessienne s'effectue par l'assemblage de  $\frac{\partial}{\partial x_i} \underline{a}$  à l'aide de la formule (C.3) et son produit à gauche avec  $Q^T$  comme indiqué dans (C.4).

Cela permet de ne pas assembler directement la hessienne et d'obtenir à la place une décomposition de cette dernière comme le produit de deux matrices creuses. Notons à ce propos que la matrice  $\left( \frac{\partial}{\partial x_1} \underline{a}, \frac{\partial}{\partial x_2} \underline{a}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{n_V}} \underline{a} \right)$  possède la même structure creuse que la matrice  $Q$ . En pratique, seul le produit de la matrice hessienne par un vecteur est utile. Ce dernier est accompli par deux produits matrice creuse-vecteur pleins successifs.

---

## Annexe D

### Images de problèmes inverses



FIG. D.1 – Echelle de couleurs utilisées pour les reconstructions dans cette annexe. La couleur la plus à gauche correspond à une activité électrique nulle ( $\min=0$ ). La couleur la plus à droite à l'activité électrique la plus importante pour l'image considérée. Dans toutes les figures de cette annexe, on représente la valeur absolue de l'activité électrique.

#### D.1 Problème inverse MEG

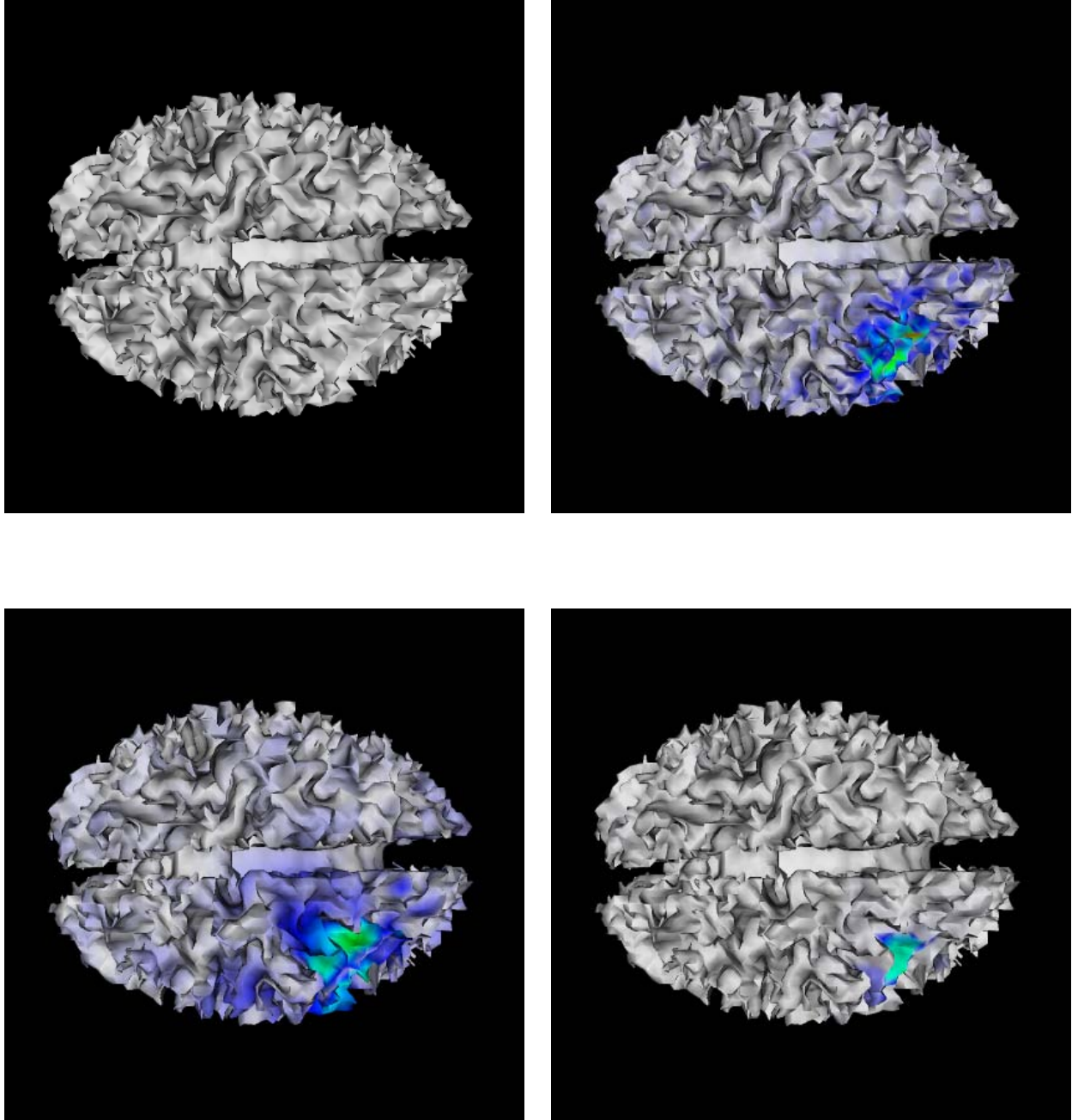


FIG. D.2 – Reconstruction de 1 patch d'activité. Niveau de bruit sur les capteurs 0%. Vue de dessus. De gauche à droite et de bas en haut : source originale (max=1), C-MN (max=0.32), C-HEAT (max=0.37) et C-TV (max=0.54).

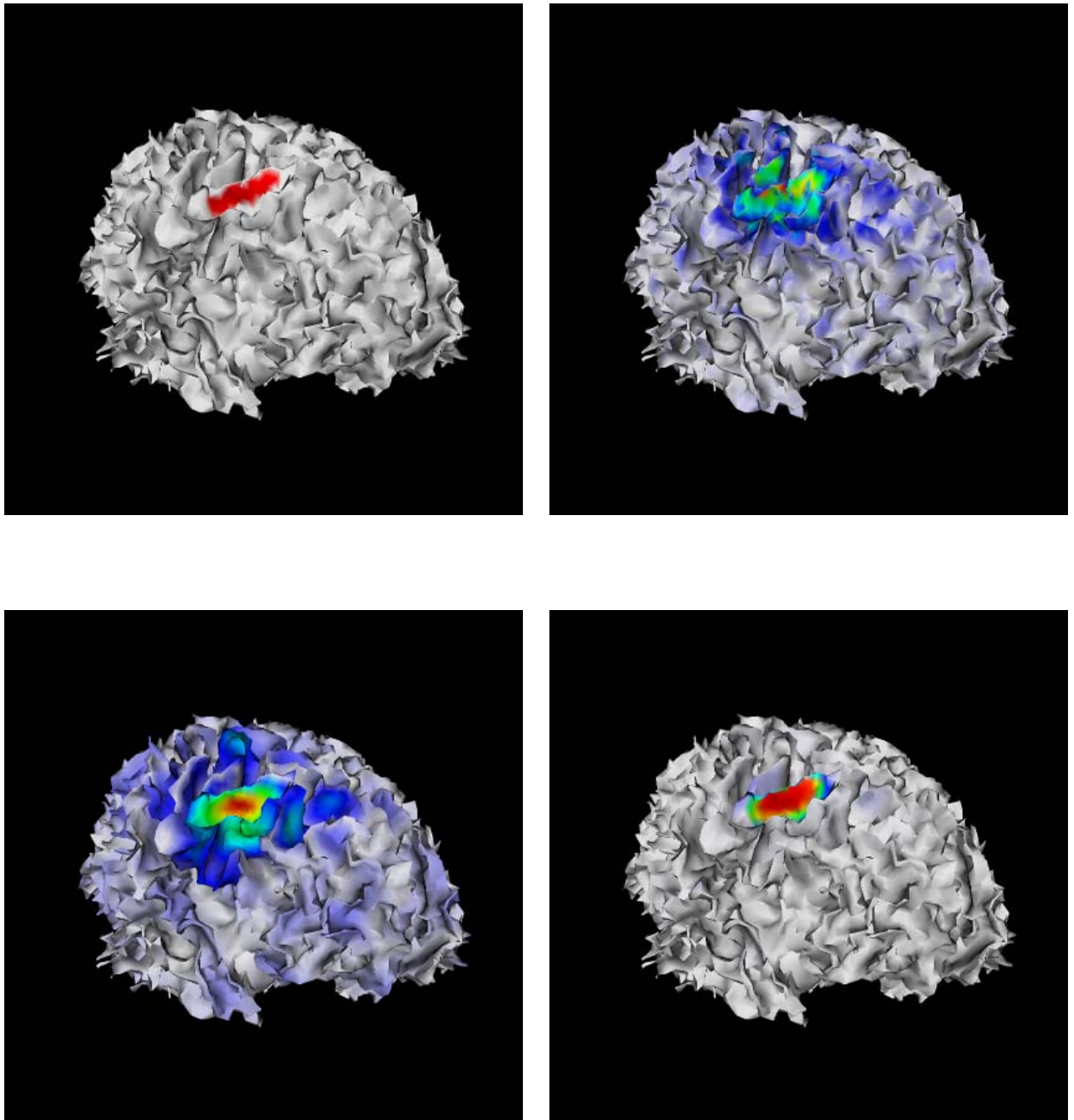


FIG. D.3 – Reconstruction de 1 patch d'activité. Niveau de bruit sur les capteurs 0%. Vue avant gauche. De gauche à droite et de bas en haut : source originale (max=1), C-MN (max=0.32), C-HEAT (max=0.37) et C-TV (max=0.54).

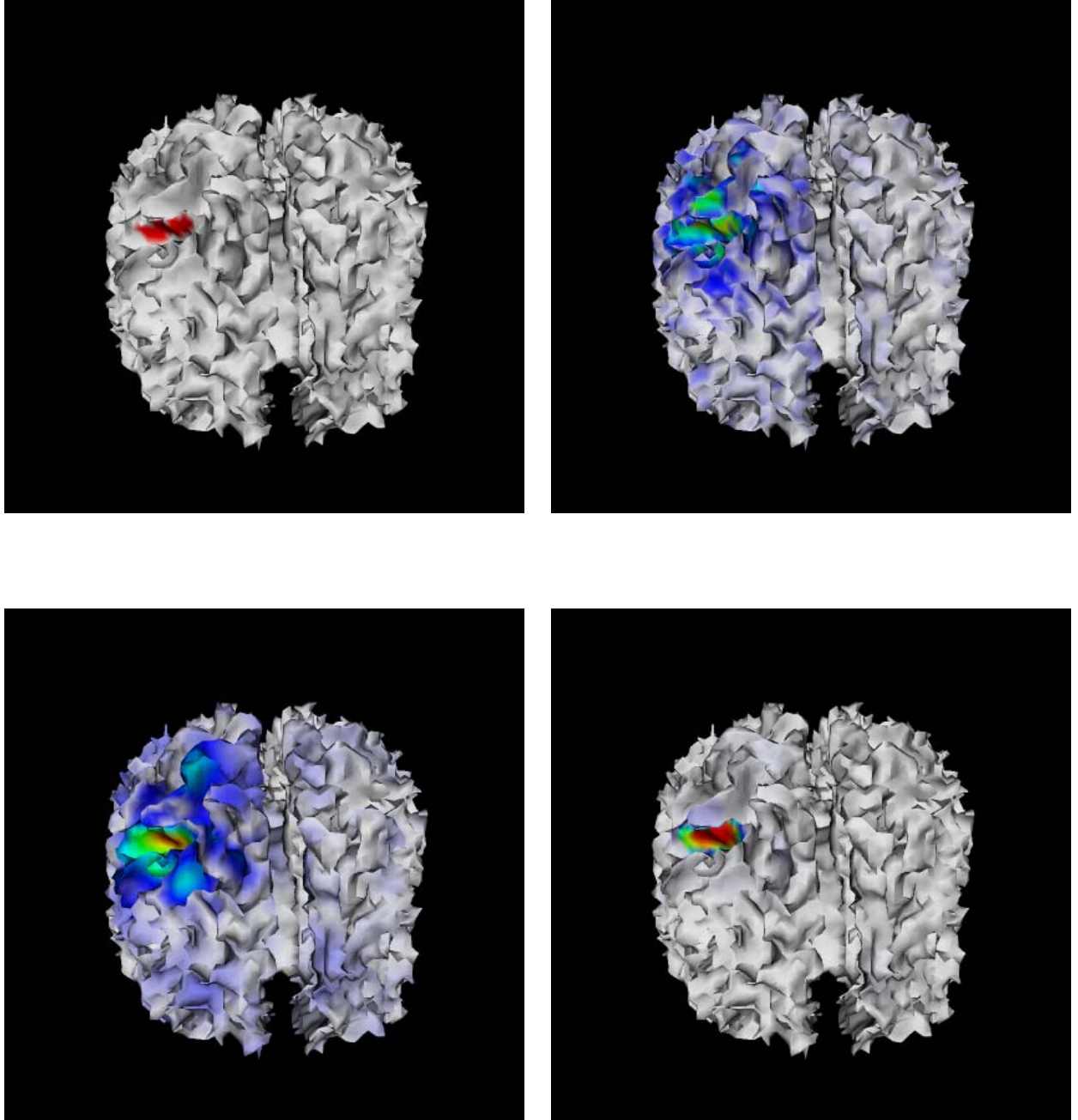


FIG. D.4 – Reconstruction de 1 patch d'activité. Niveau de bruit sur les capteurs 0%. Vue avant de dessus. De gauche à droite et de bas en haut : source originale (max=1), C-MN (max=0.32), C-HEAT (max=0.37) et C-TV (max=0.54).



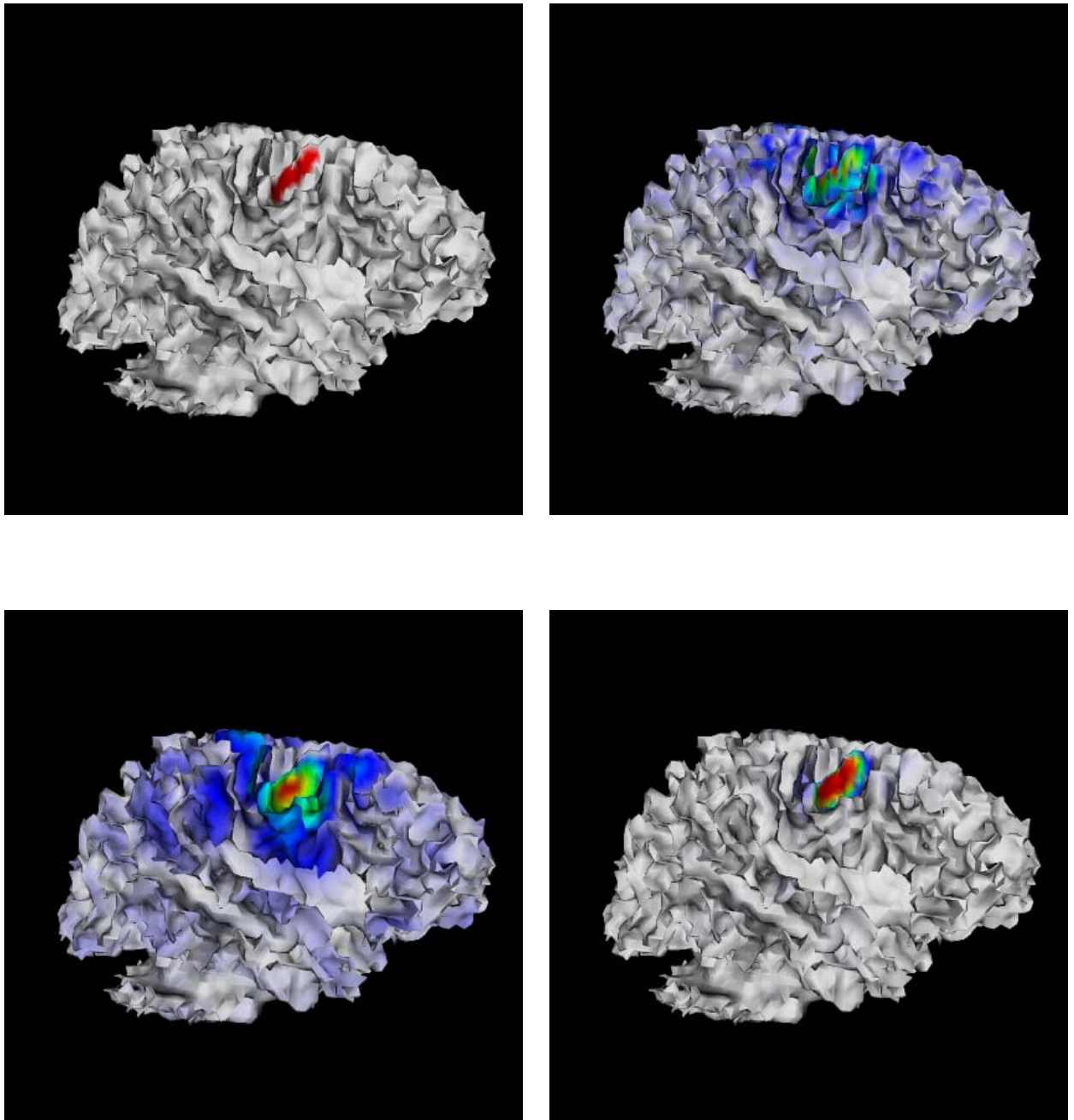


FIG. D.5 – Reconstruction de 1 patch d'activité. Niveau de bruit sur les capteurs 0%. Vue latérale droite. De gauche à droite et de bas en haut : source originale (max=1), C-MN (max=0.32), C-HEAT (max=0.37) et C-TV (max=0.54).

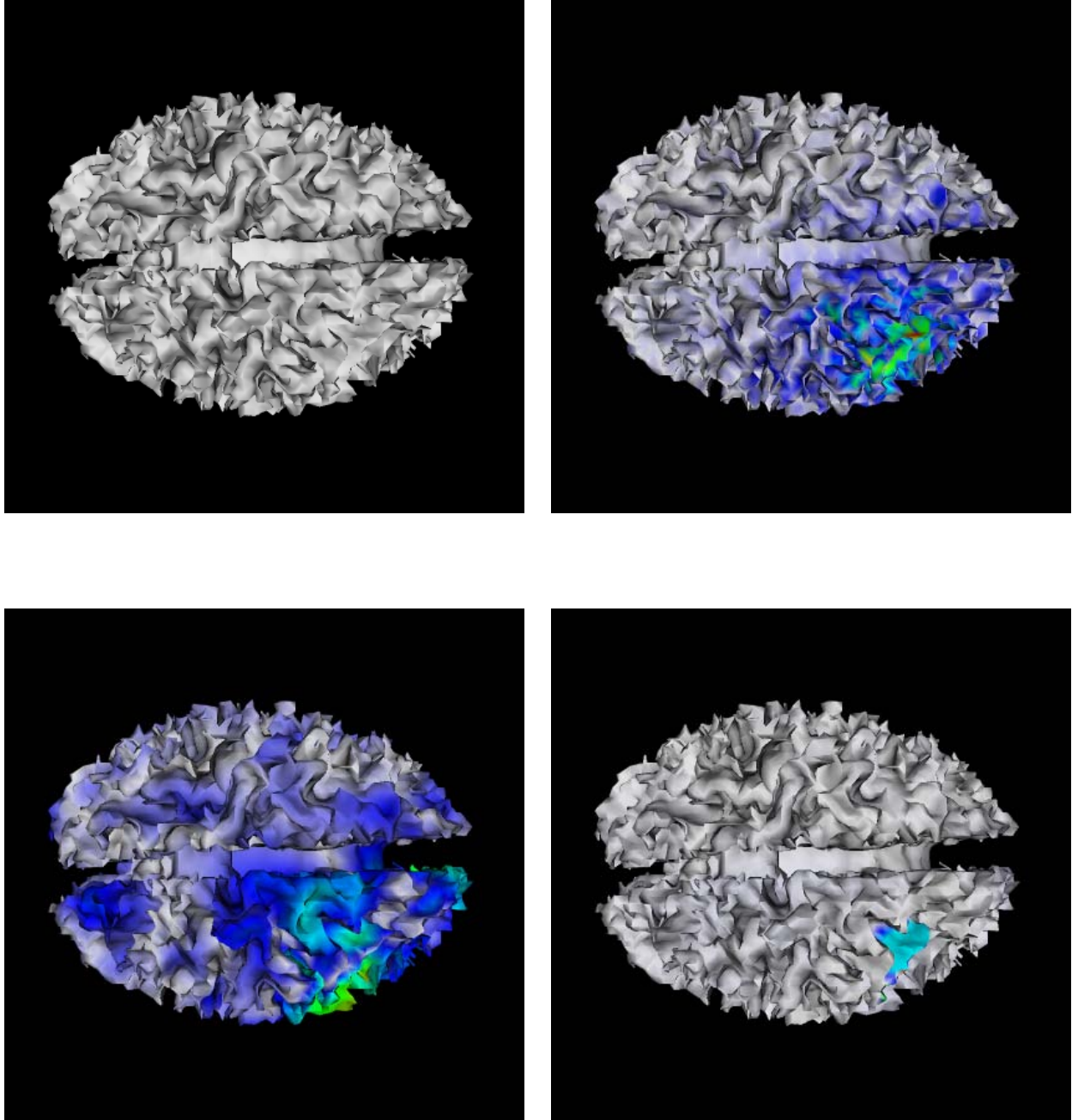


FIG. D.6 – Reconstruction de 1 patch d'activité. Niveau de bruit sur les capteurs 5%. Vue de dessus. De gauche à droite et de bas en haut : source originale (max=1), MN (max=0.10), HEAT (max=0.20) et TV (max=0.43).



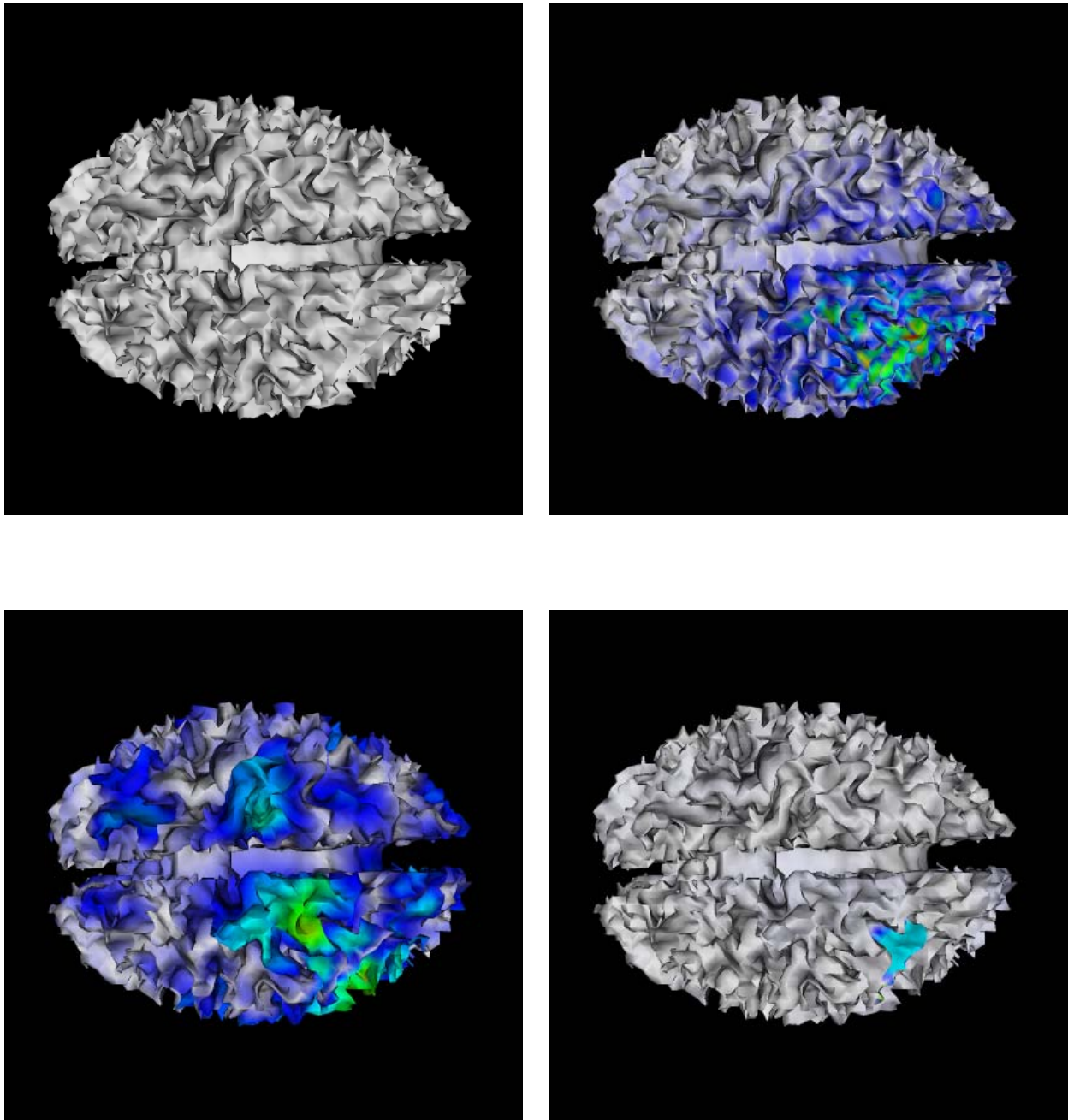


FIG. D.7 – Reconstruction de 1 patch d'activité. Niveau de bruit sur les capteurs 10%. Vue de dessus. De gauche à droite et de bas en haut : source originale (max=1), MN (max=0.06), HEAT (max=0.23) et TV (max=0.43).

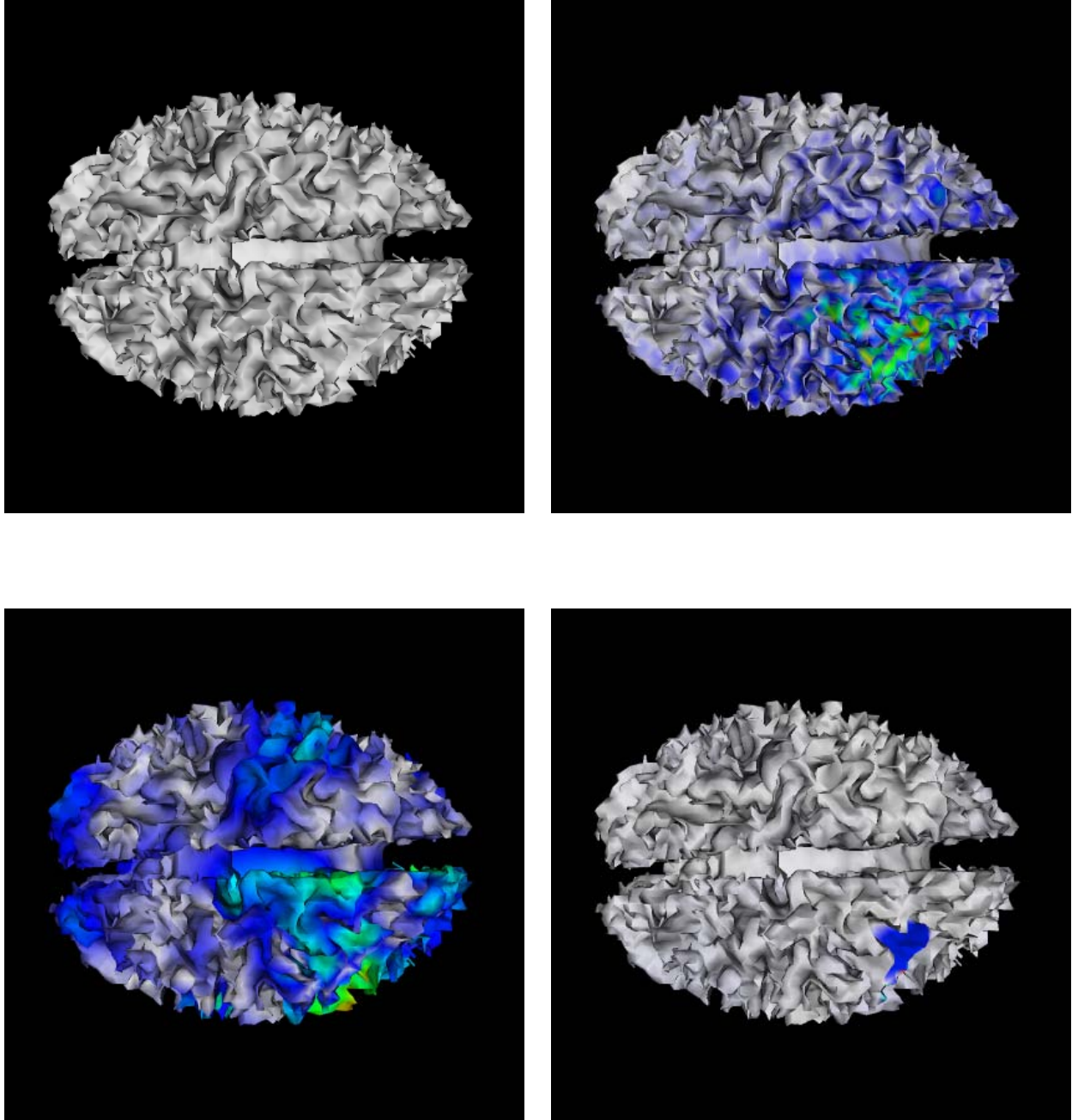


FIG. D.8 – Reconstruction de 1 patch d'activité. Niveau de bruit sur les capteurs 20%. Vue de dessus. De gauche à droite et de bas en haut : source originale (max=1), MN (max=0.06), HEAT (max=0.16) et TV (max=0.50).

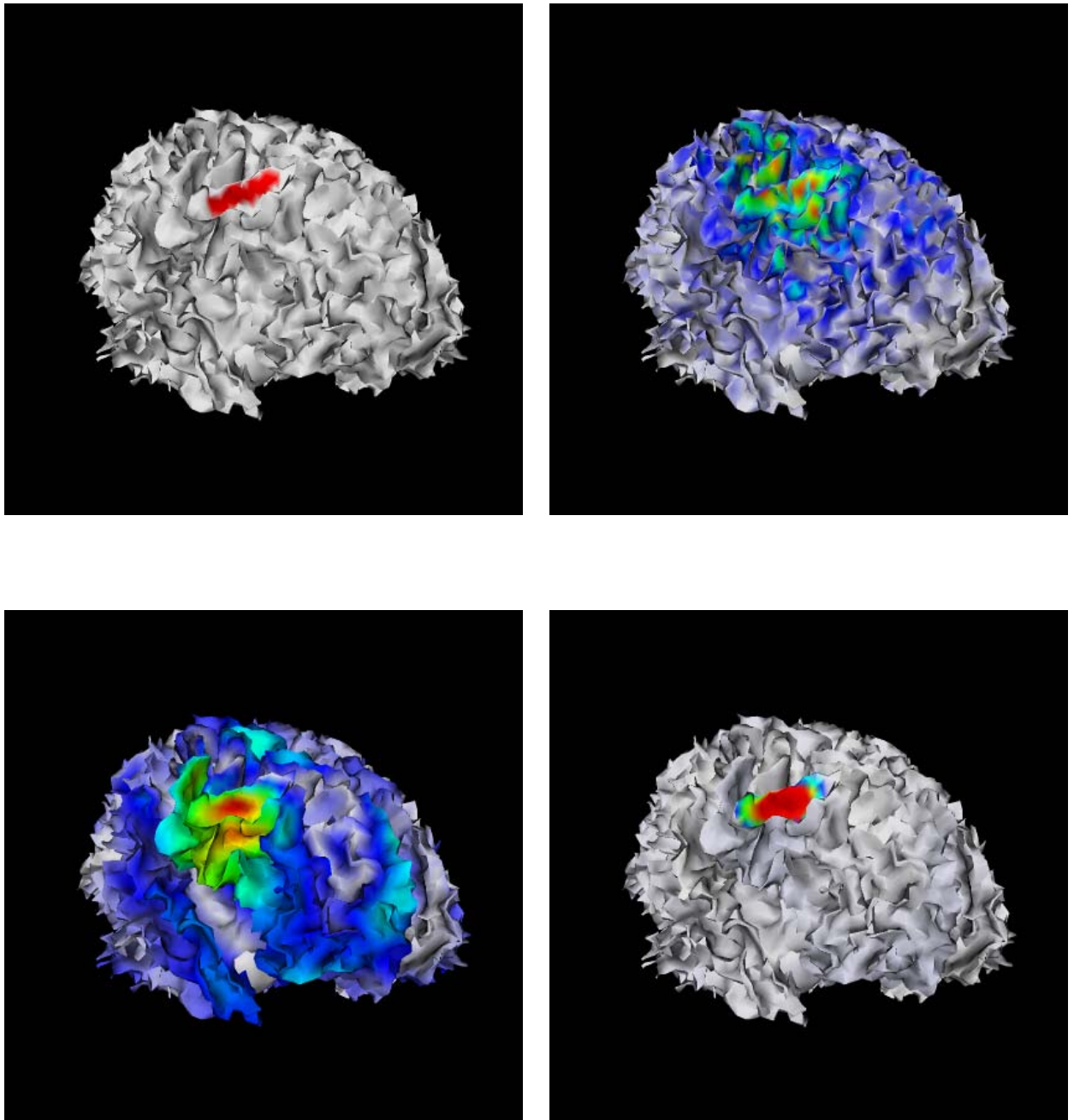


FIG. D.9 – Reconstruction de 1 patch d'activité. Niveau de bruit sur les capteurs 5%. Vue avant gauche. De gauche à droite et de bas en haut : source originale (max=1), MN (max=0.10), HEAT (max=0.20) et TV (max=0.43).

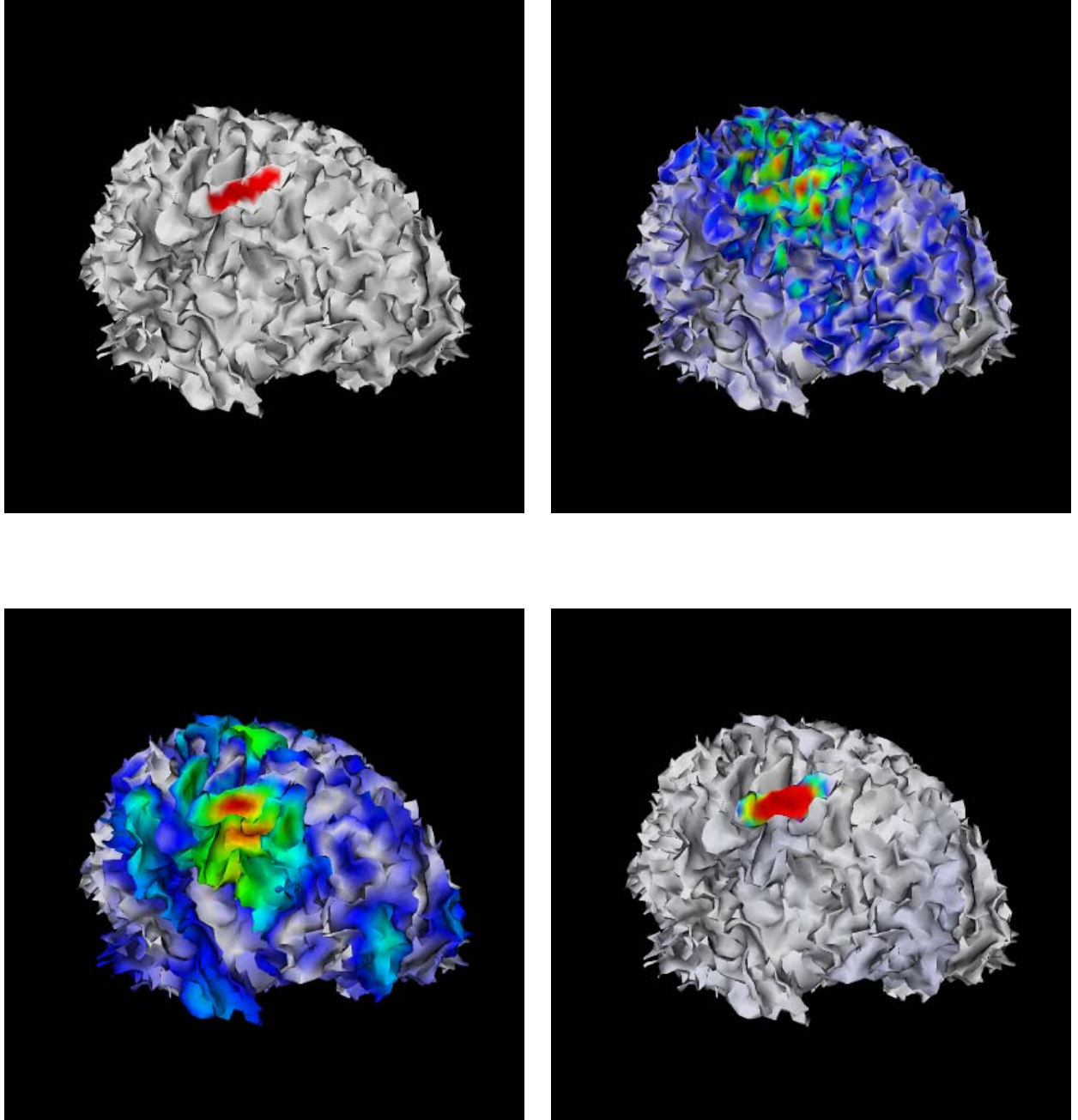


FIG. D.10 – Reconstruction de 1 patch d'activité. Niveau de bruit sur les capteurs 10%. Vue avant gauche. De gauche à droite et de bas en haut : source originale (max=1), MN (max=0.06), HEAT (max=0.23) et TV (max=0.43).



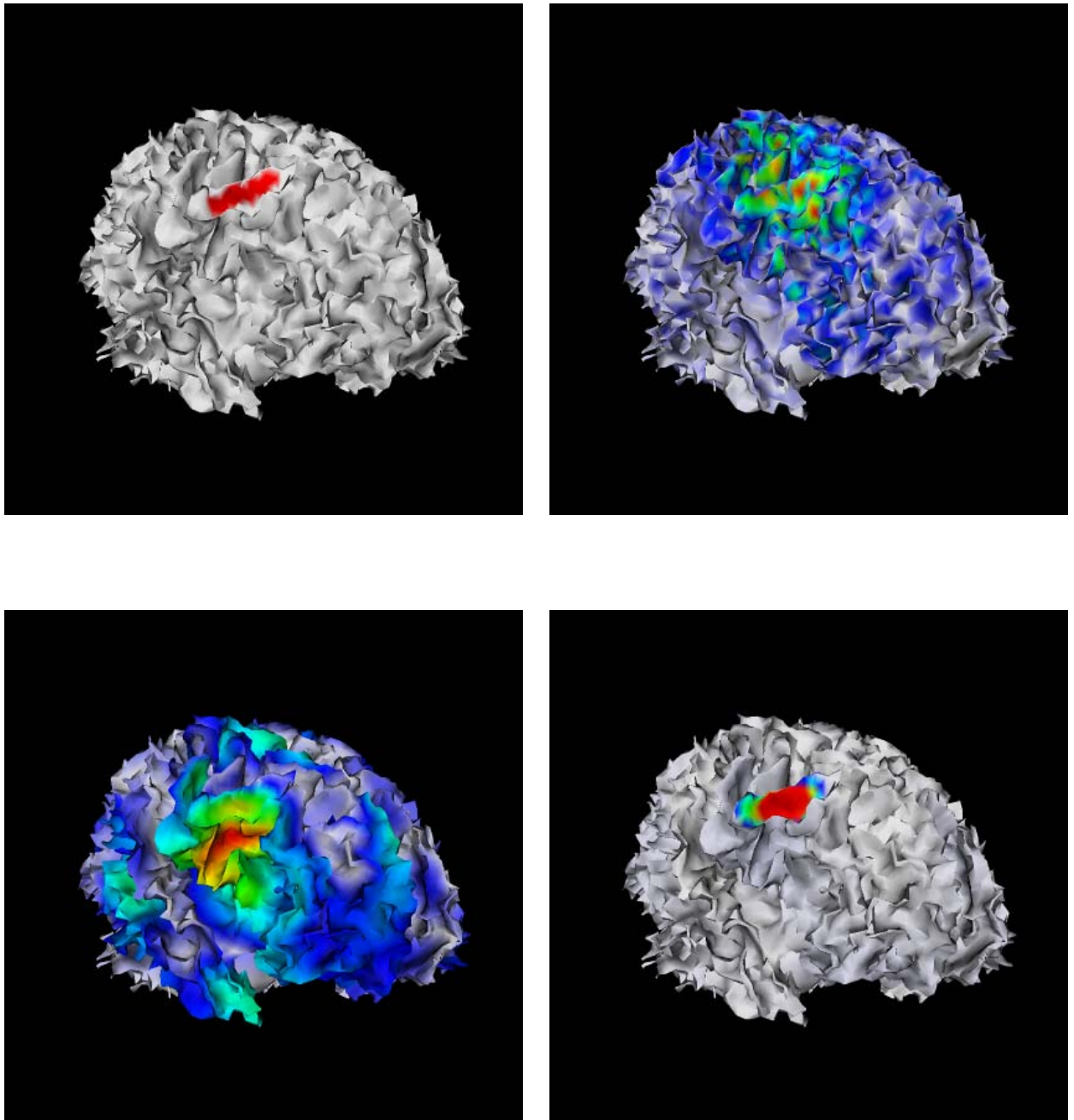


FIG. D.11 – Reconstruction de 1 patch d'activité. Niveau de bruit sur les capteurs 20%. Vue avant gauche. De gauche à droite et de bas en haut : source originale (max=1), MN (max=0.06), HEAT (max=0.16) et TV (max=0.50).

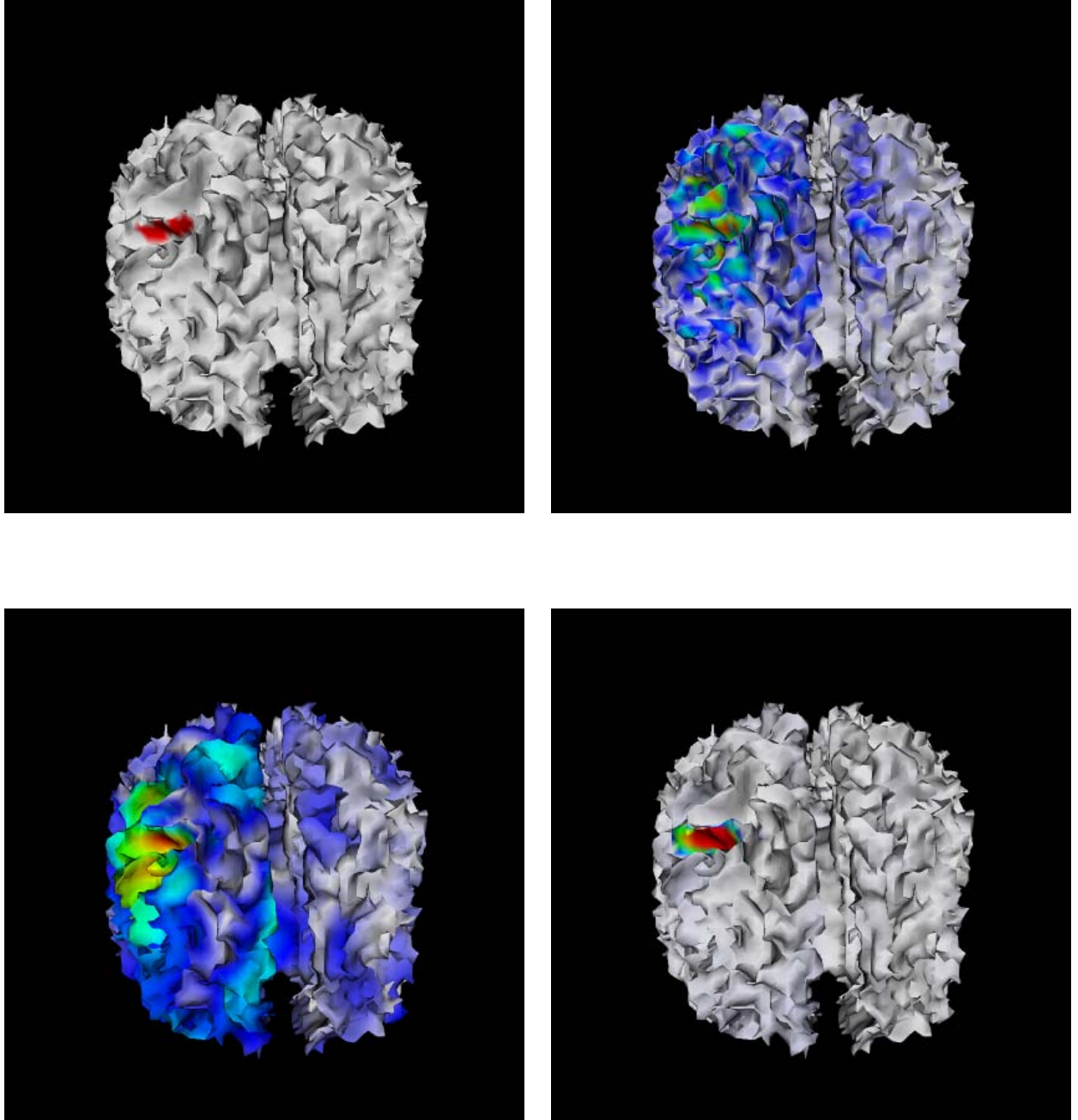


FIG. D.12 – Reconstruction de 1 patch d'activité. Niveau de bruit sur les capteurs 5%. Vue avant de dessus. De gauche à droite et de bas en haut : source originale (max=1), MN (max=0.10), HEAT (max=0.20) et TV (max=0.43).

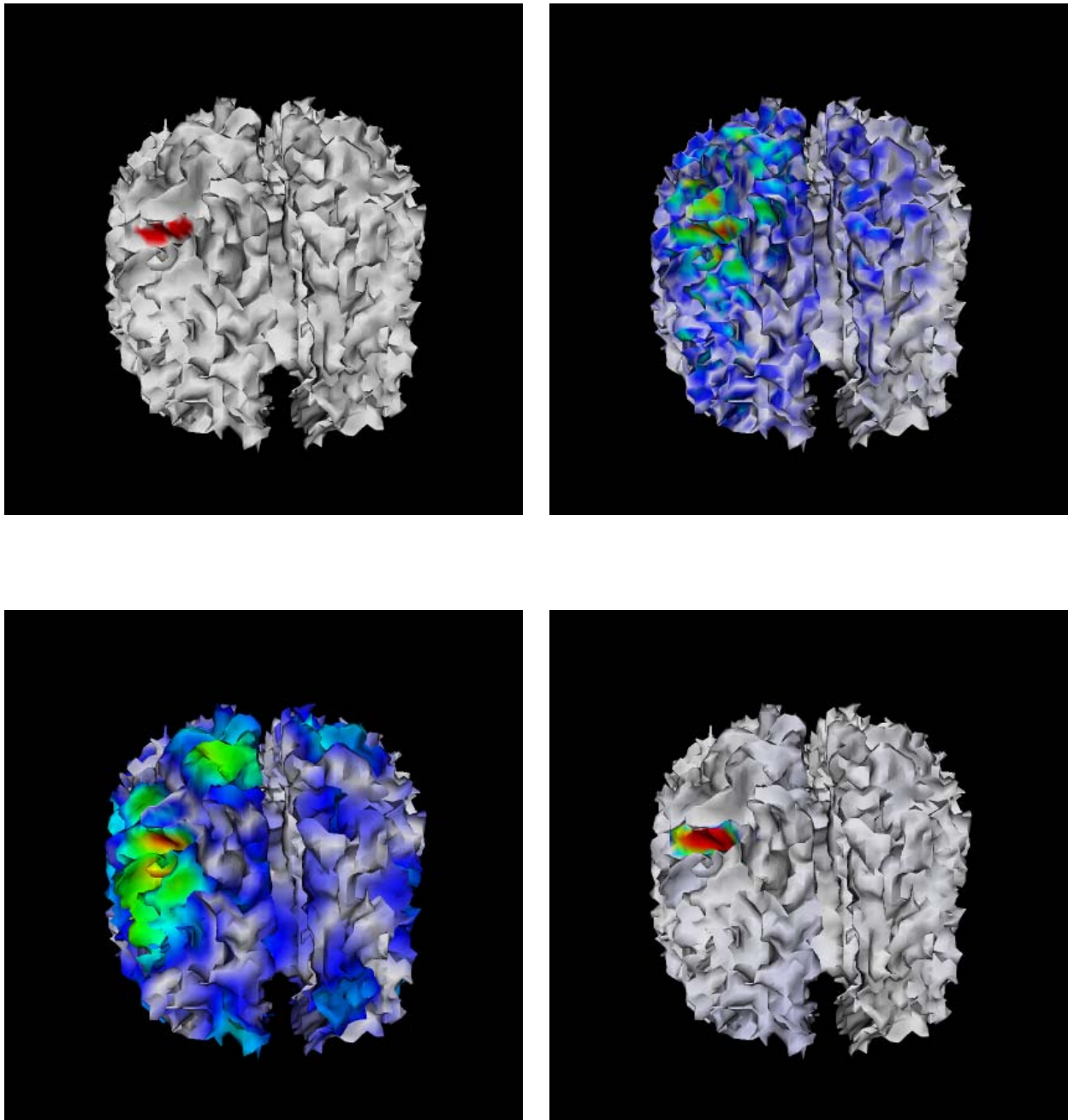


FIG. D.13 – Reconstruction de 1 patch d'activité. Niveau de bruit sur les capteurs 10%. Vue avant de dessus. De gauche à droite et de bas en haut : source originale (max=1), MN (max=0.06), HEAT (max=0.23) et TV (max=0.43).

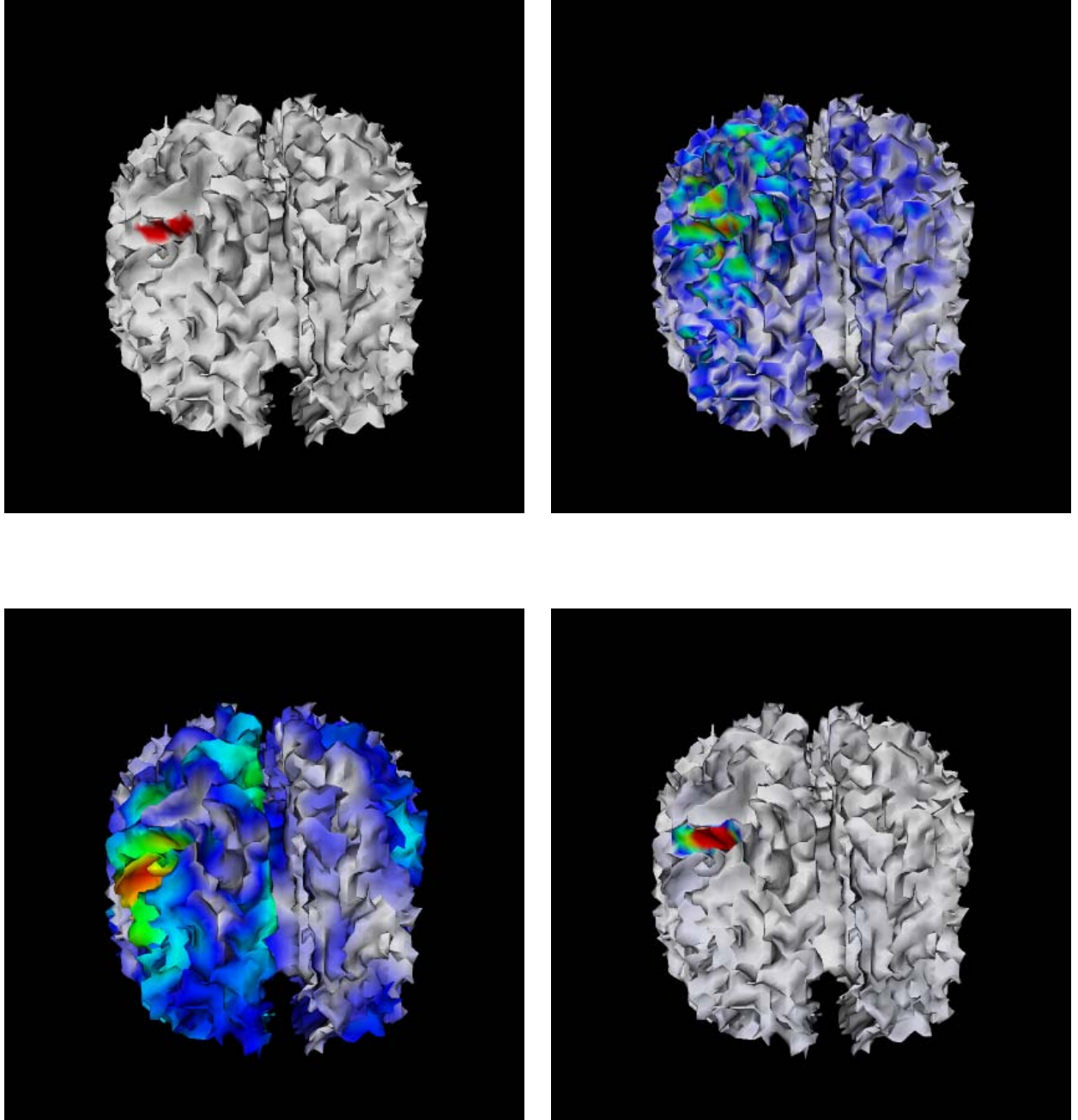


FIG. D.14 – Reconstruction de 1 patch d'activité. Niveau de bruit sur les capteurs 20%. Vue avant de dessus. De gauche à droite et de bas en haut : source originale (max=1), MN (max=0.06), HEAT (max=0.16) et TV (max=0.50).



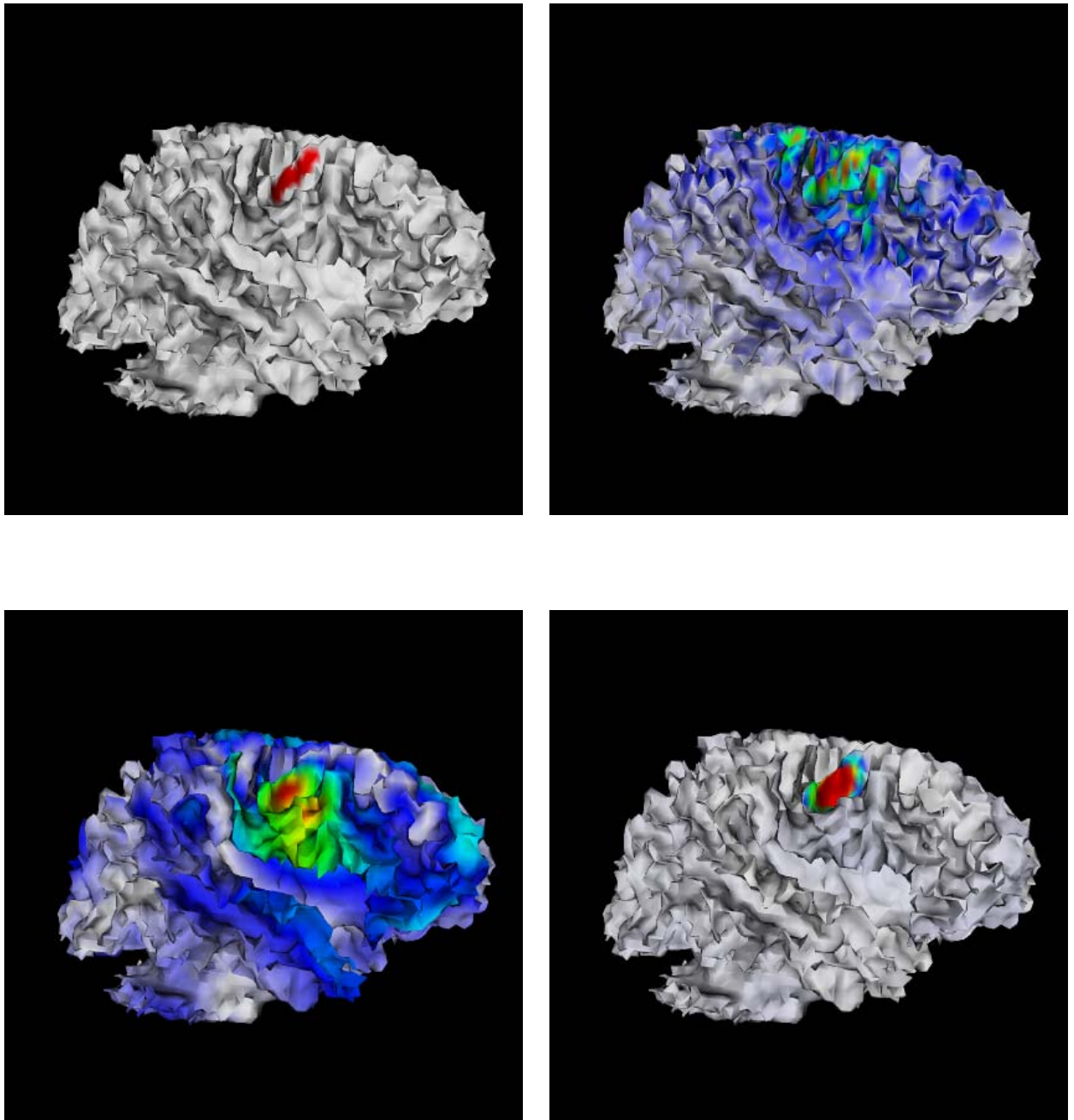


FIG. D.15 – Reconstruction de 1 patch d'activité. Niveau de bruit sur les capteurs 5%. Vue latérale droite. De gauche à droite et de bas en haut : source originale (max=1), MN (max=0.10), HEAT (max=0.20) et TV (max=0.43).

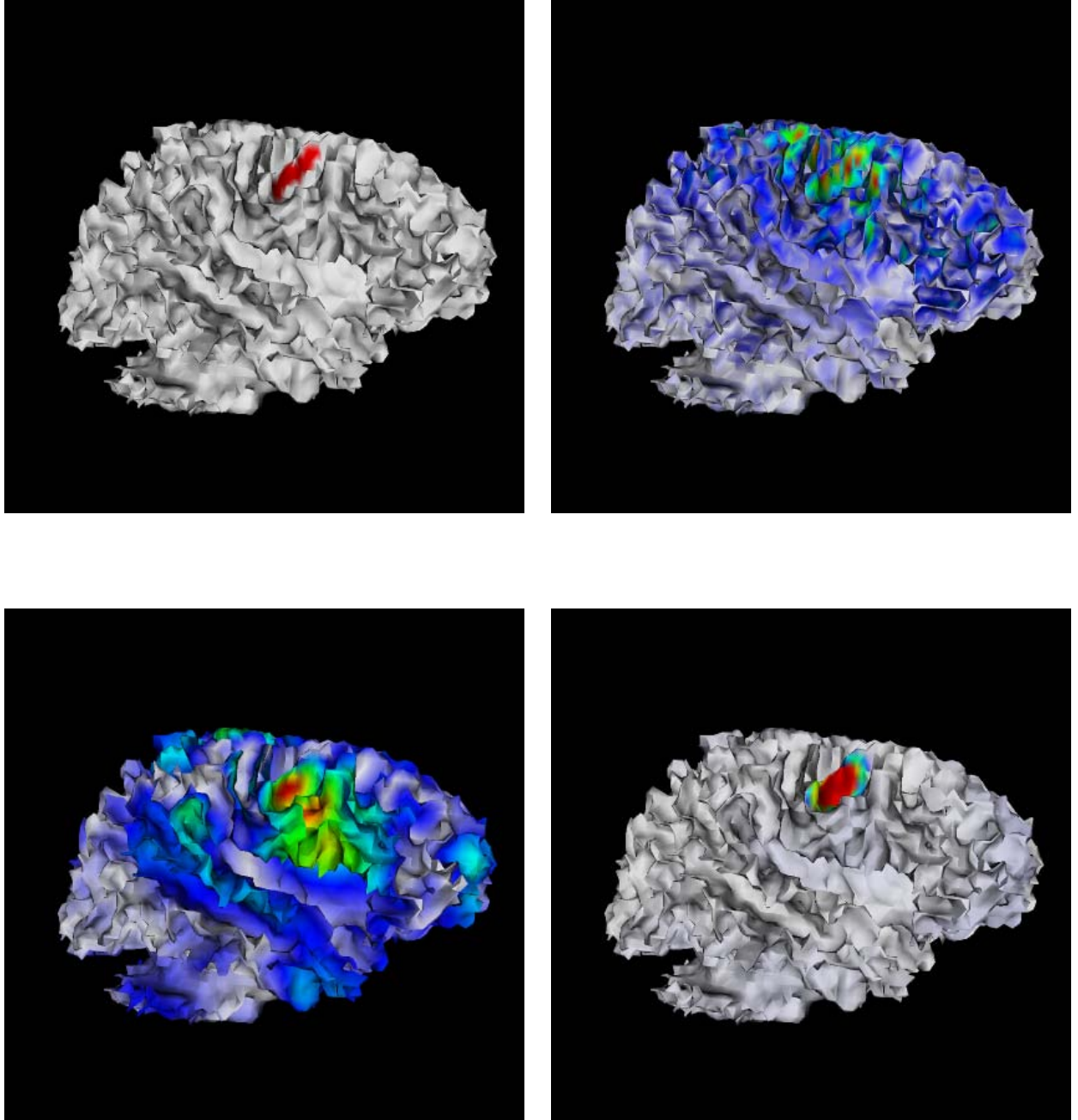


FIG. D.16 – Reconstruction de 1 patch d'activité. Niveau de bruit sur les capteurs 10%. Vue latérale droite. De gauche à droite et de bas en haut : source originale (max=1), MN (max=0.06), HEAT (max=0.23) et TV (max=0.43).

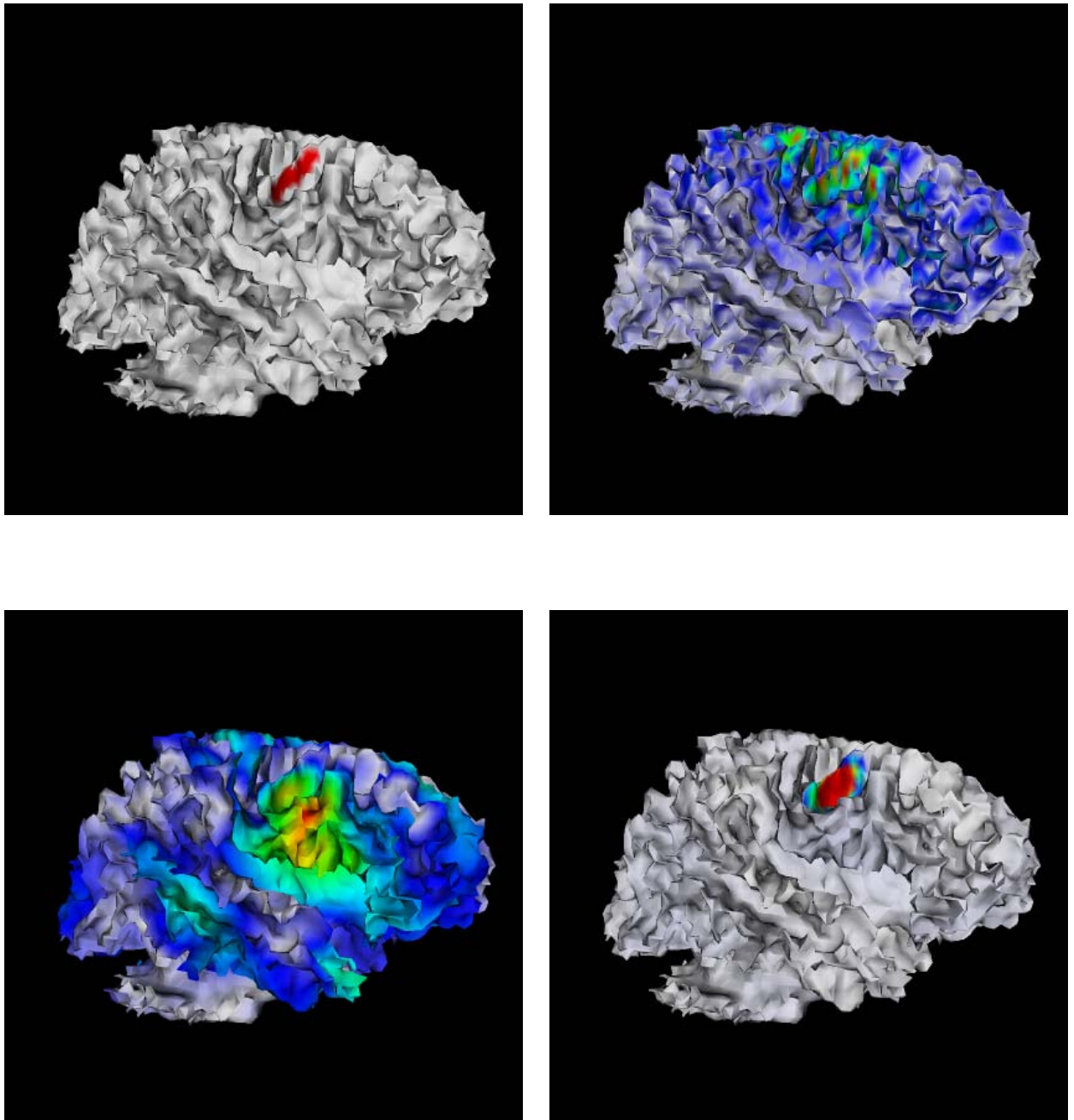


FIG. D.17 – Reconstruction de 1 patch d'activité. Niveau de bruit sur les capteurs 20%. Vue latérale droite. De gauche à droite et de bas en haut : source originale (max=1), MN (max=0.06), HEAT (max=0.16) et TV (max=0.50).

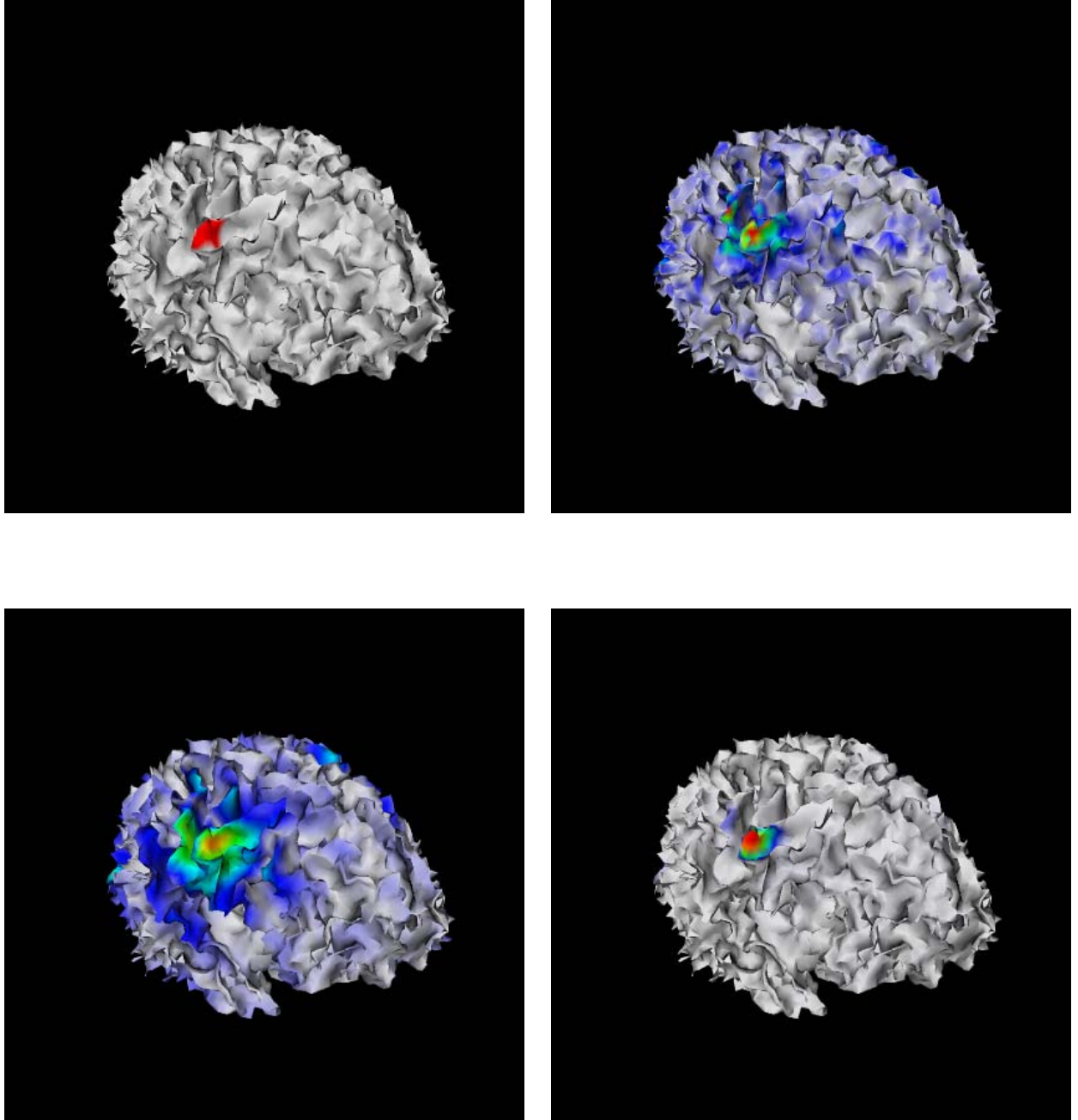


FIG. D.18 – Reconstruction de 3 patches d'activité. Niveau de bruit sur les capteurs 5%. Vue avant gauche. De gauche à droite et de bas en haut : source originale (max=1), C-MN (max=0.26), C-HEAT (max=0.31) et C-TV (max=0.93).



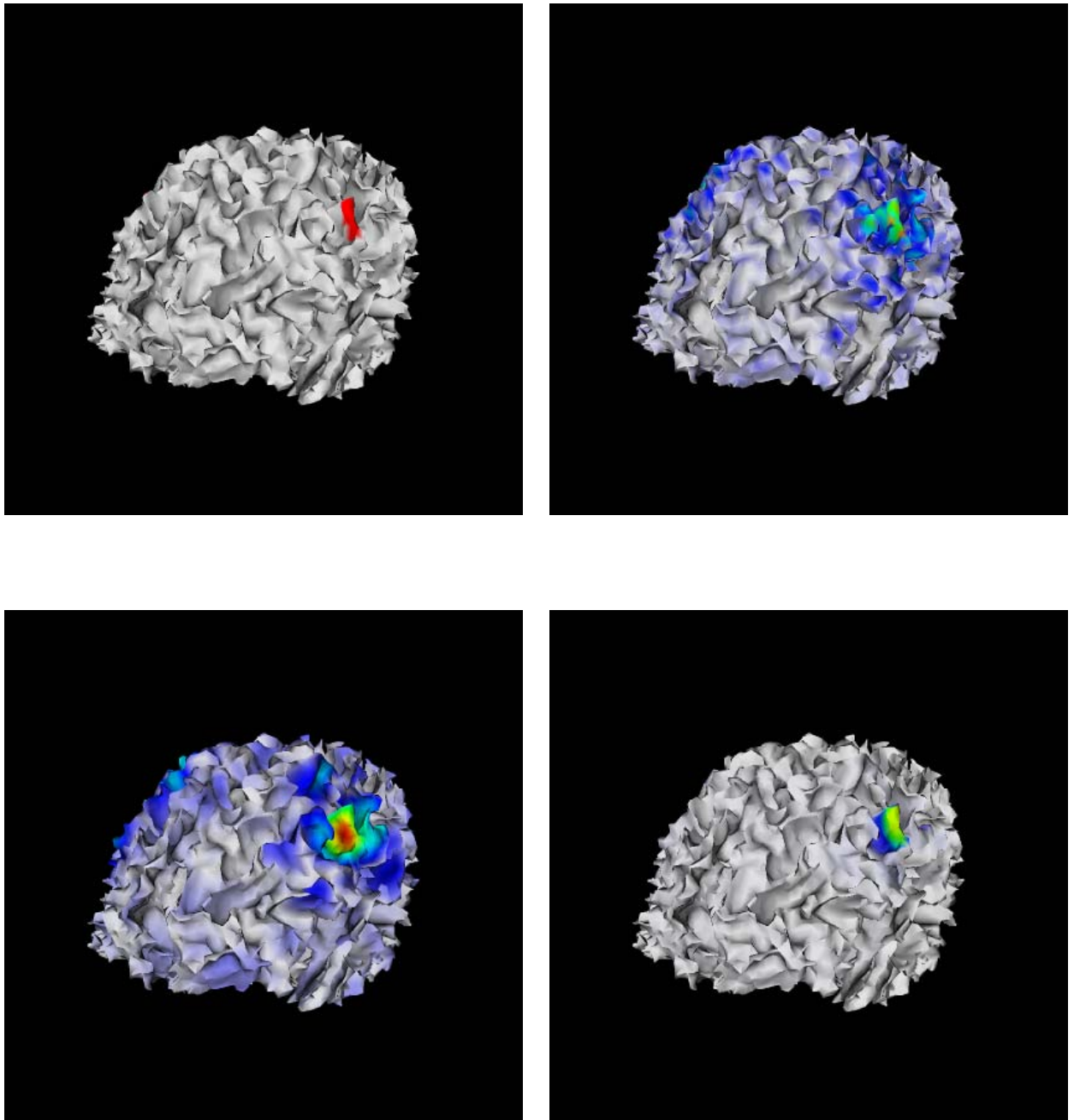


FIG. D.19 – Reconstruction de 3 patches d'activité. Niveau de bruit sur les capteurs 5%. Vue avant droite. De gauche à droite et de bas en haut : source originale ( $\max=1$ ), C-MN ( $\max=0.26$ ), C-HEAT ( $\max=0.31$ ) et C-TV ( $\max=0.93$ ).

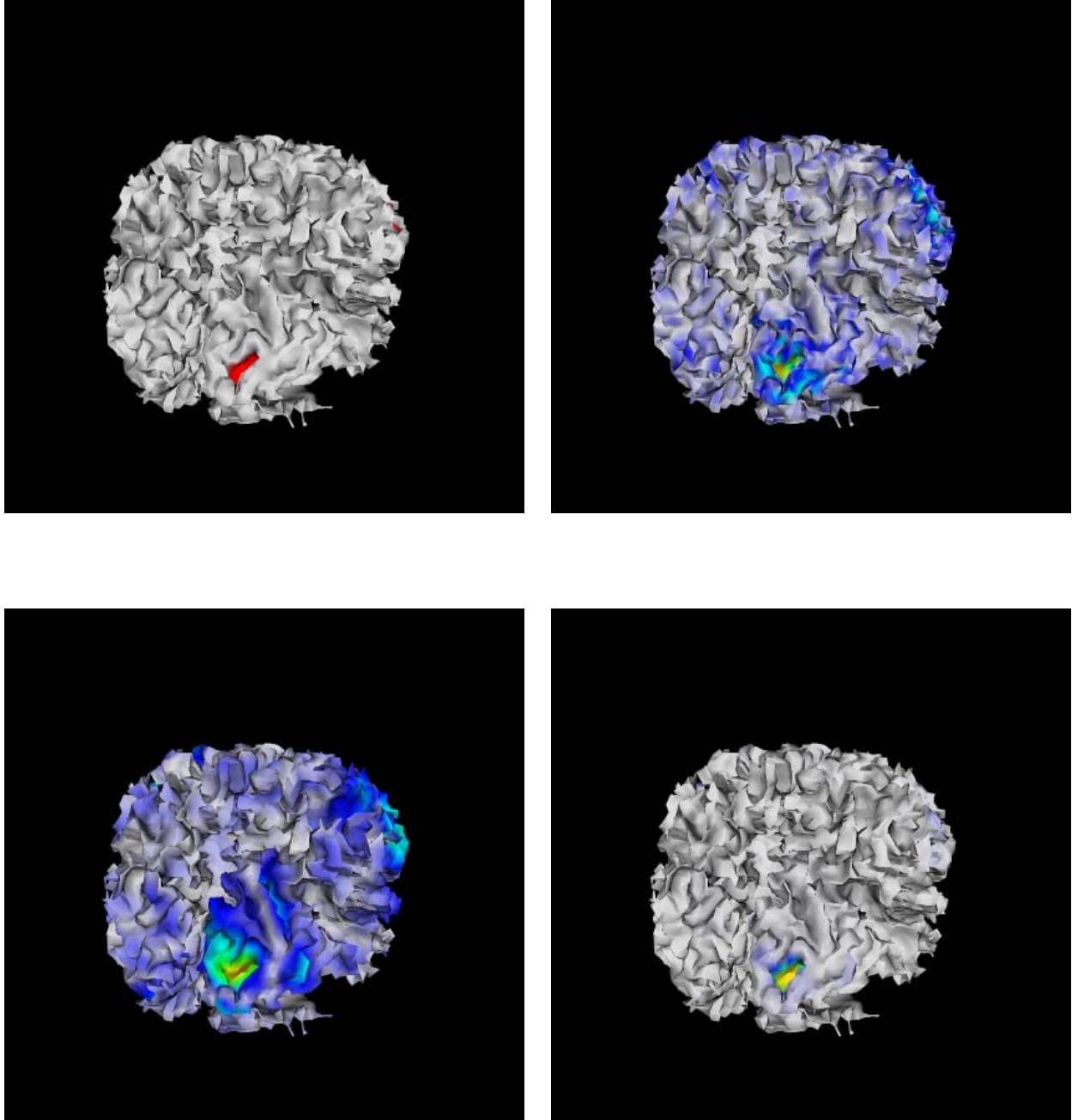


FIG. D.20 – Reconstruction de 3 patches d'activité. Niveau de bruit sur les capteurs 5%. Vue arrière droite. De gauche à droite et de bas en haut : source originale (max=1), C-MN (max=0.26), C-HEAT (max=0.31) et C-TV (max=0.93).

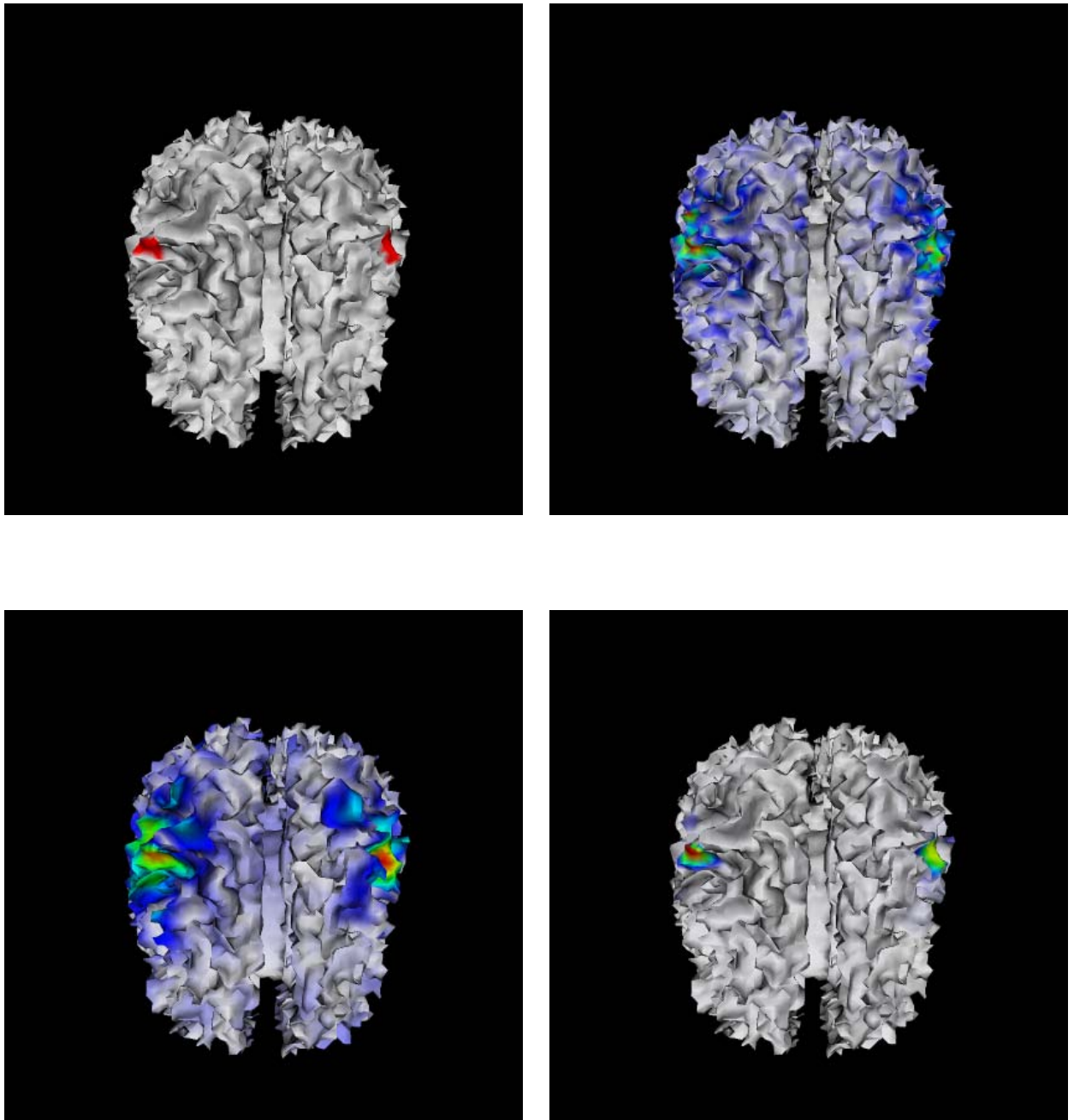


FIG. D.21 – Reconstruction de 3 patches d'activité. Niveau de bruit sur les capteurs 5%. Vue avant de dessus. De gauche à droite et de bas en haut : source originale (max=1), C-MN (max=0.26), C-HEAT (max=0.31) et C-TV (max=0.93).

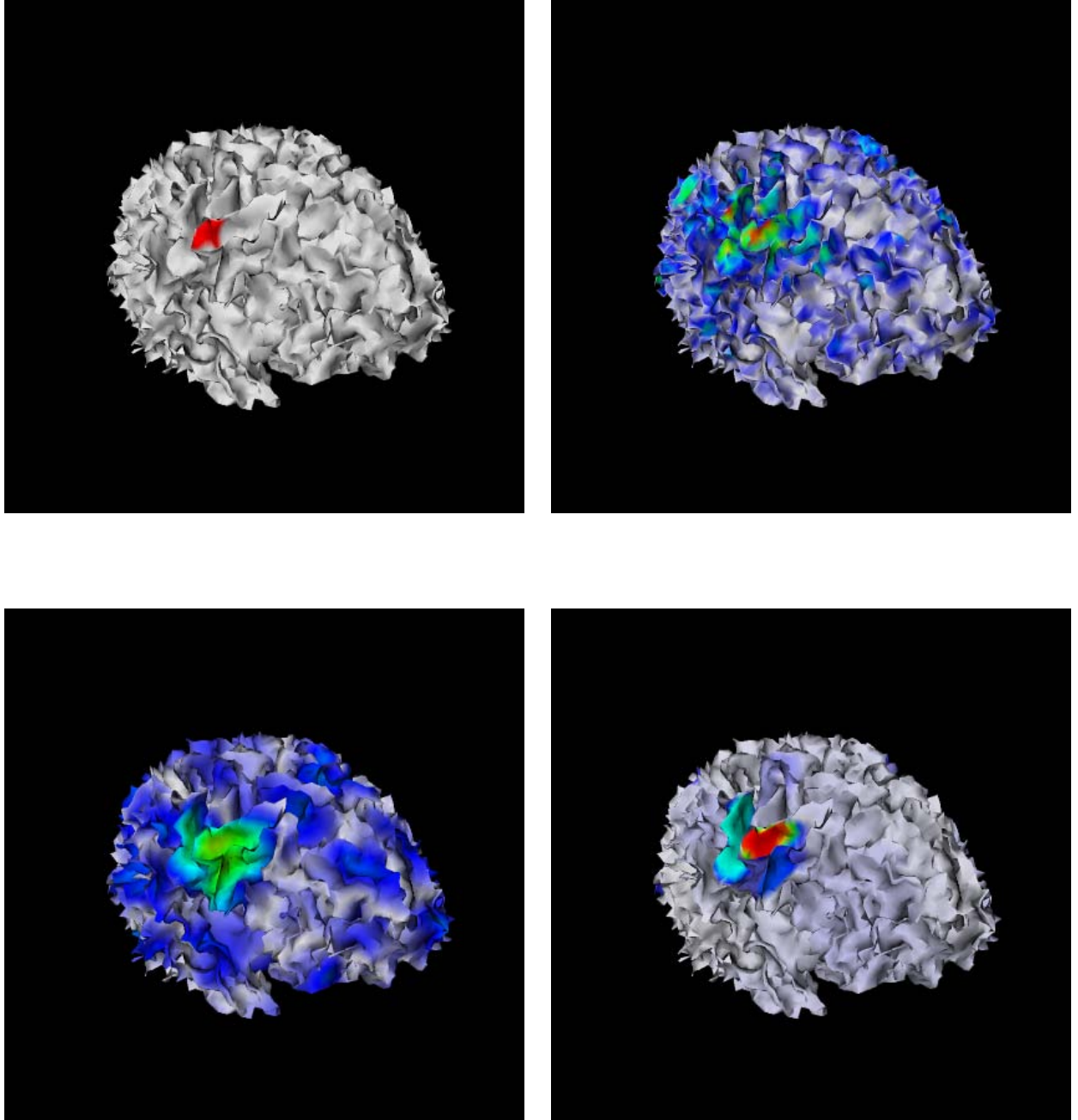


FIG. D.22 – Reconstruction de 3 patches d'activité. Niveau de bruit sur les capteurs 5%. Vue avant gauche. De gauche à droite et de bas en haut : source originale (max=1), MN (max=0.08), HEAT (max=0.24) et TV (max=0.21).



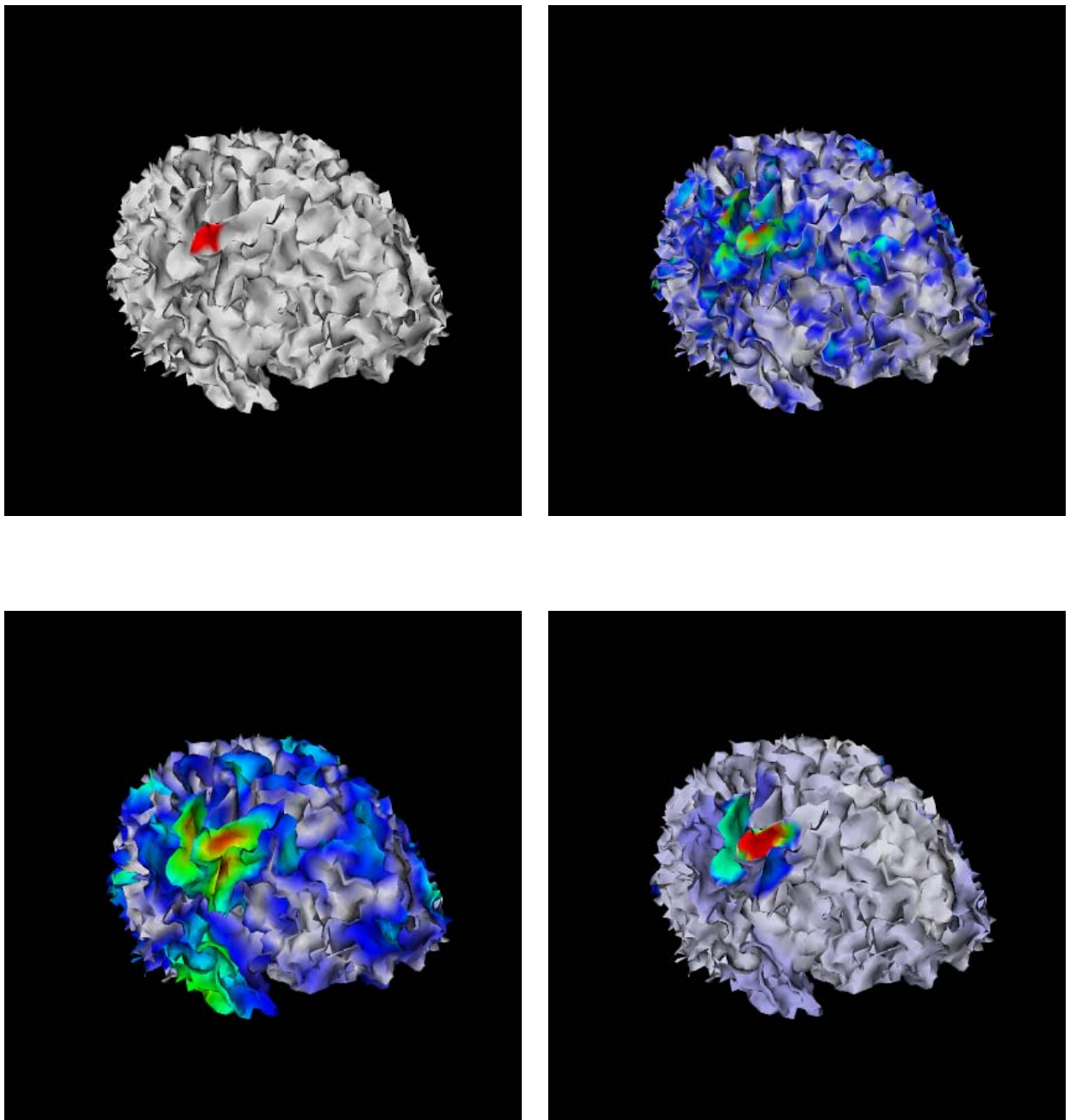


FIG. D.23 – Reconstruction de 3 patches d'activité. Niveau de bruit sur les capteurs 10%. Vue avant gauche. De gauche à droite et de bas en haut : source originale ( $\max=1$ ), MN ( $\max=0.09$ ), HEAT ( $\max=0.12$ ) et TV ( $\max=0.19$ ).

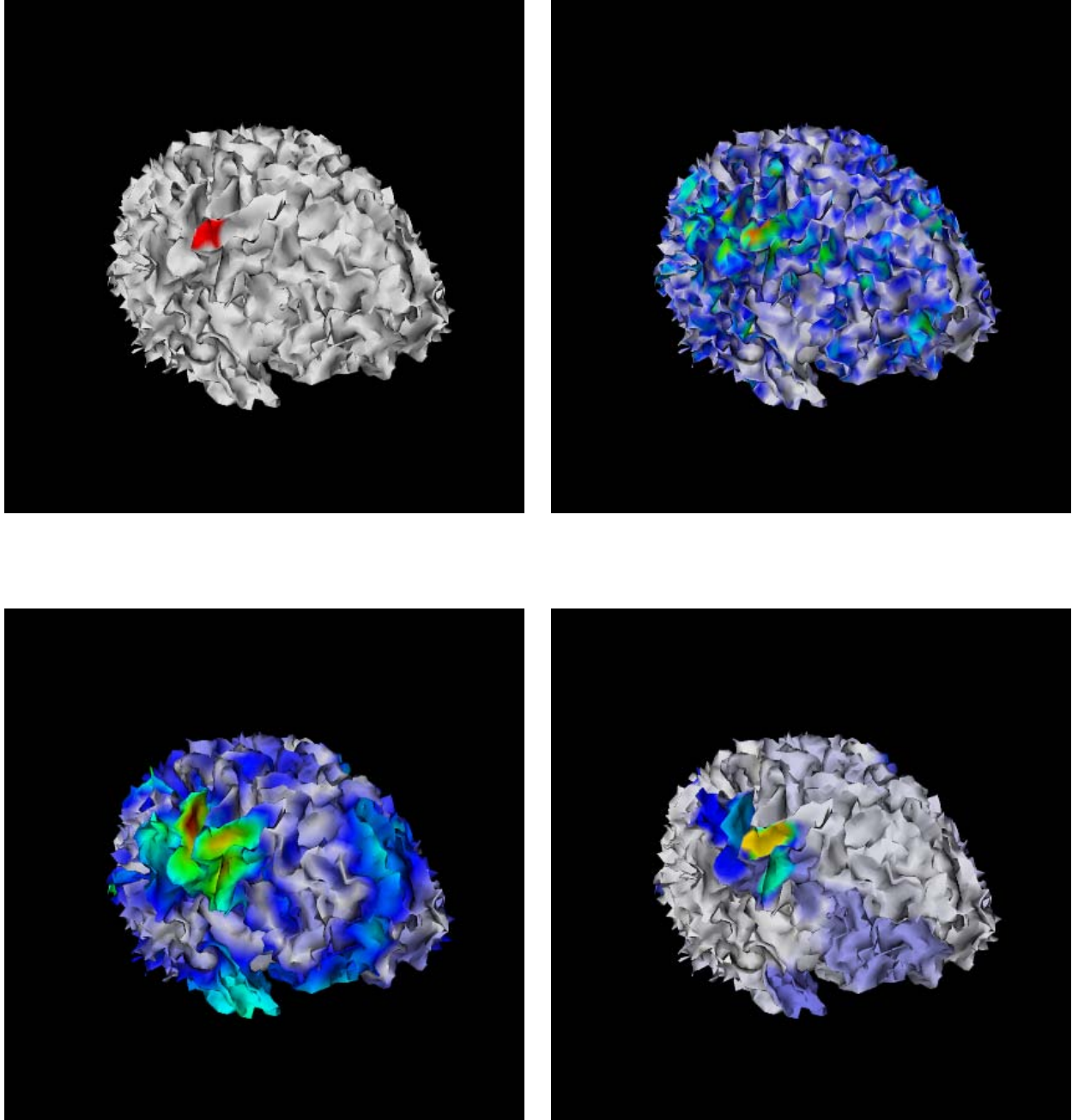


FIG. D.24 – Reconstruction de 3 patches d'activité. Niveau de bruit sur les capteurs 20%. Vue avant gauche. De gauche à droite et de bas en haut : source originale (max=1), MN (max=0.09), HEAT (max=0.11) et TV (max=0.23).

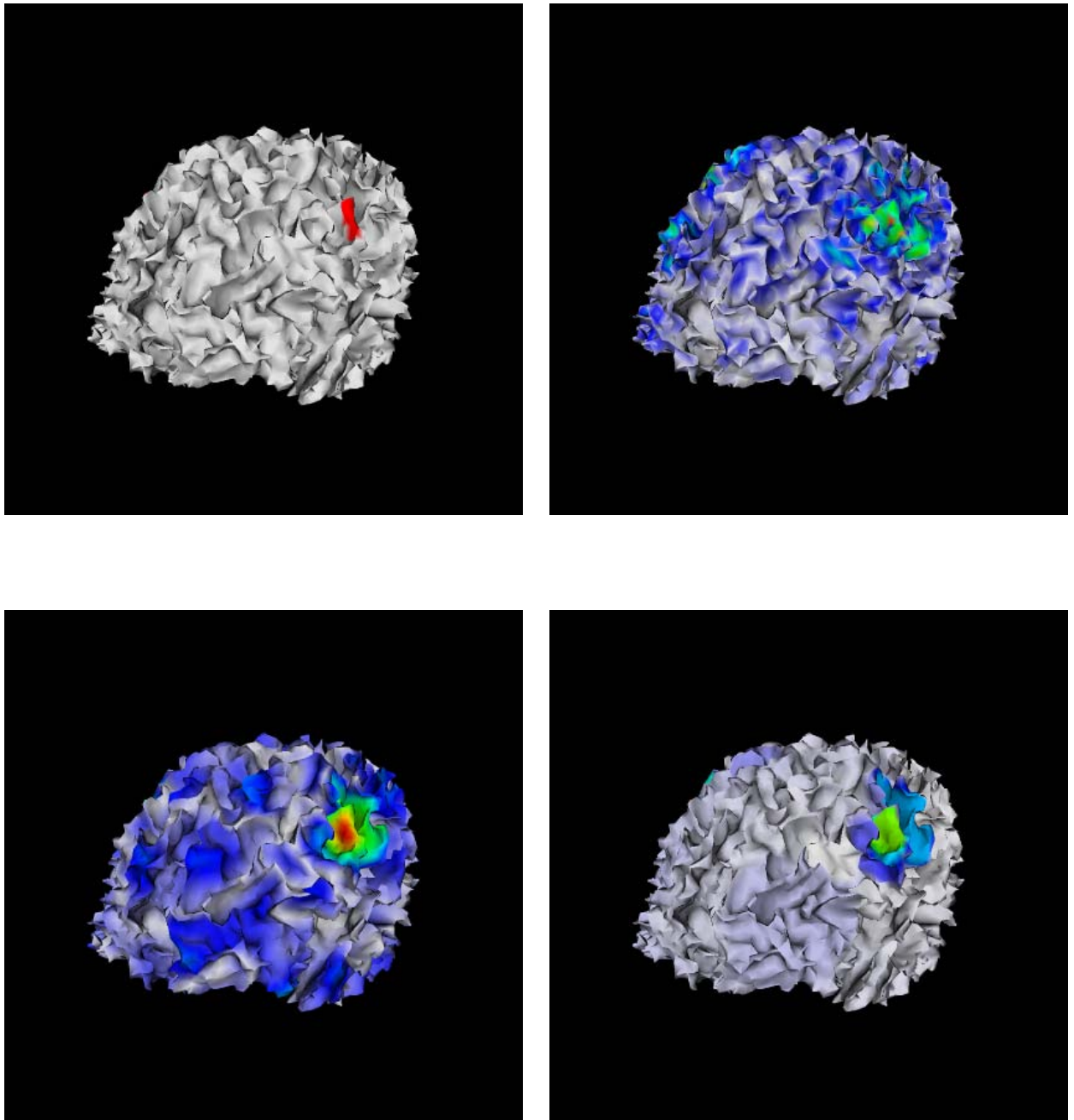


FIG. D.25 – Reconstruction de 3 patches d'activité. Niveau de bruit sur les capteurs 5%. Vue avant droite. De gauche à droite et de bas en haut : source originale ( $\max=1$ ), MN ( $\max=0.08$ ), HEAT ( $\max=0.24$ ) et TV ( $\max=0.21$ ).

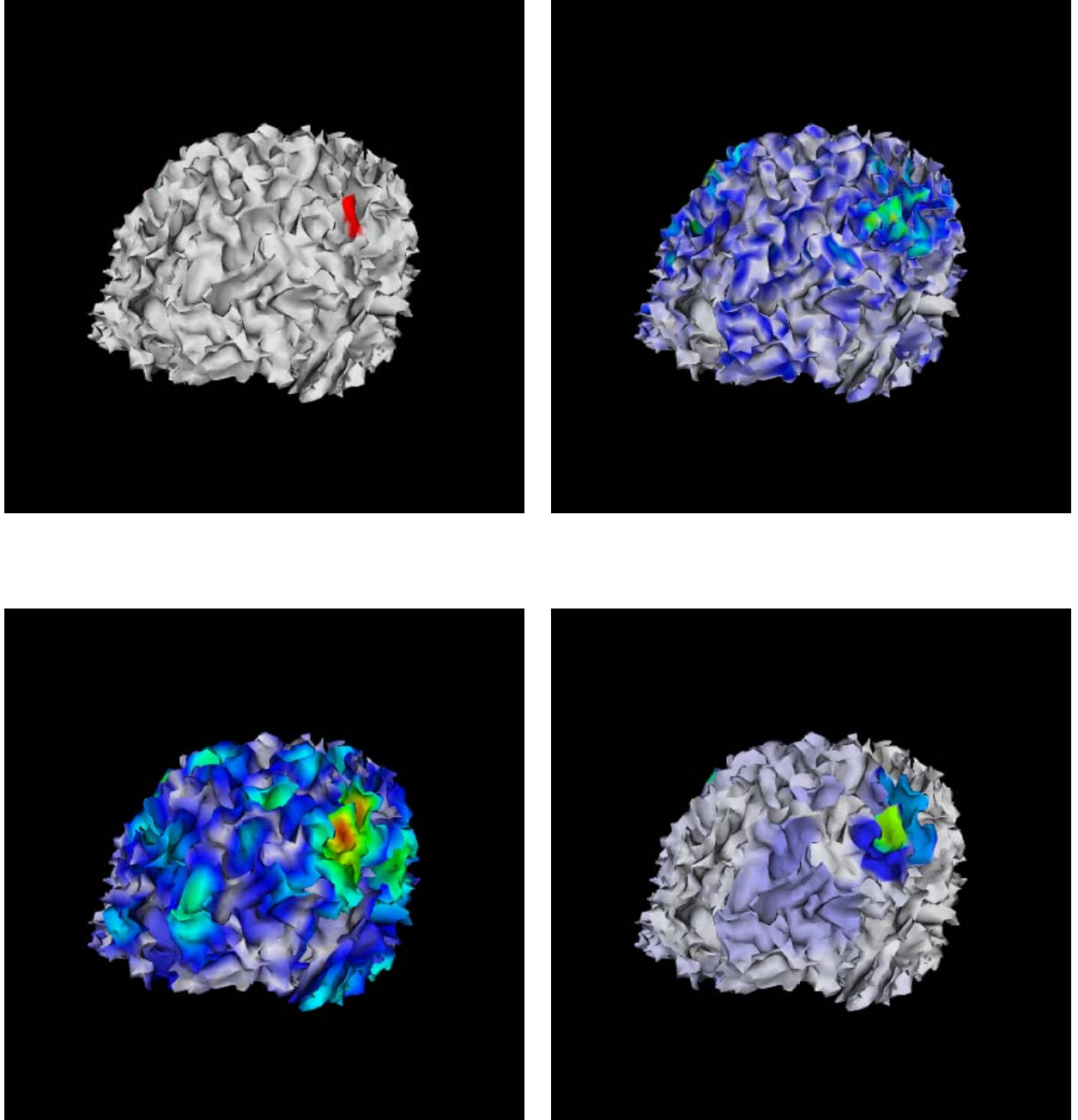


FIG. D.26 – Reconstruction de 3 patches d'activité. Niveau de bruit sur les capteurs 10%. Vue avant droite. De gauche à droite et de bas en haut : source originale ( $\max=1$ ), MN ( $\max=0.09$ ), HEAT ( $\max=0.12$ ) et TV ( $\max=0.19$ ).

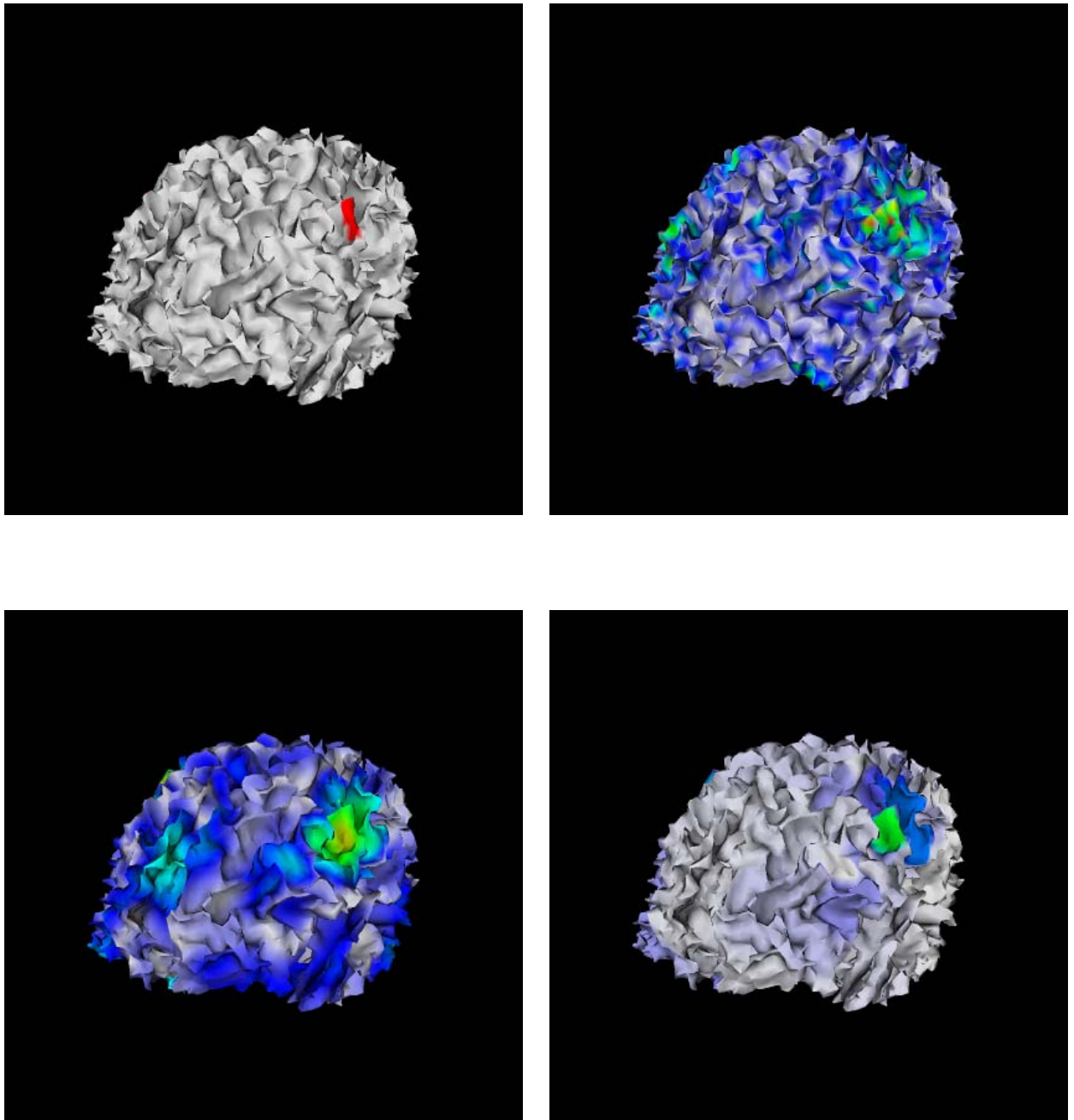


FIG. D.27 – Reconstruction de 3 patches d'activité. Niveau de bruit sur les capteurs 20%. Vue avant droite. De gauche à droite et de bas en haut : source originale ( $\max=1$ ), MN ( $\max=0.09$ ), HEAT ( $\max=0.11$ ) et TV ( $\max=0.23$ ).



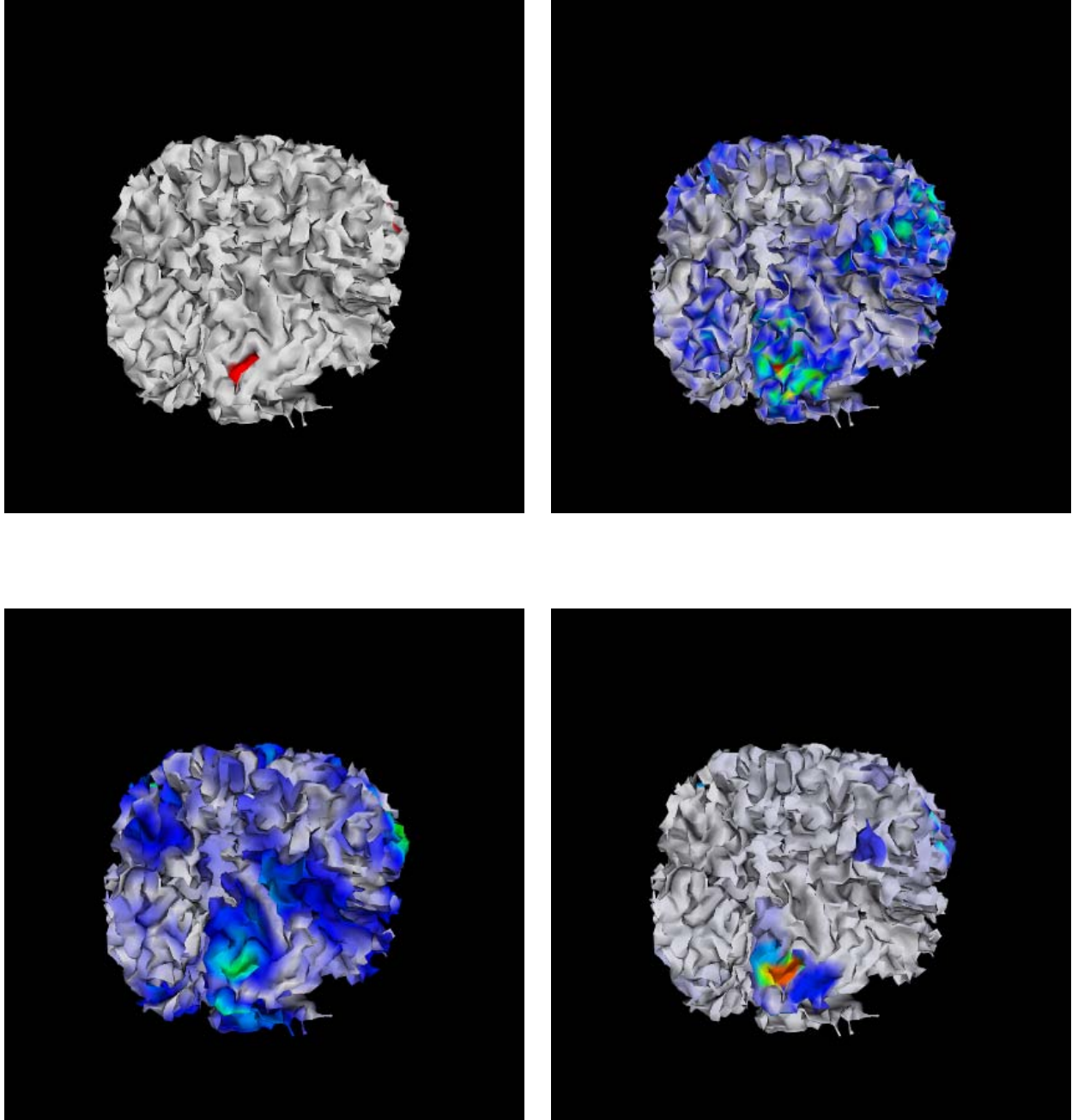


FIG. D.28 – Reconstruction de 3 patches d'activité. Niveau de bruit sur les capteurs 5%. Vue arrière droite. De gauche à droite et de bas en haut : source originale (max=1), MN (max=0.08), HEAT (max=0.24) et TV (max=0.21).

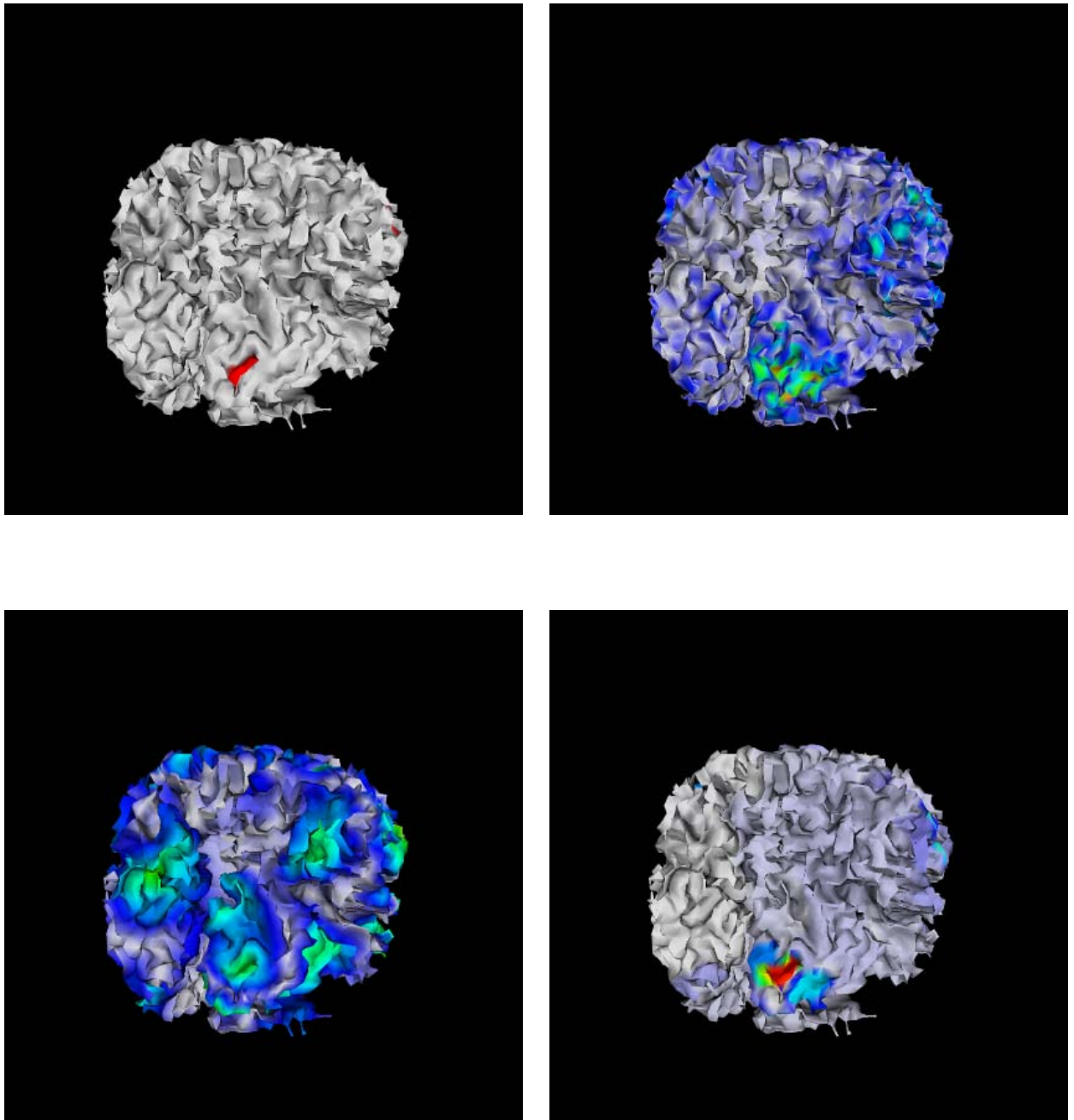


FIG. D.29 – Reconstruction de 3 patches d'activité. Niveau de bruit sur les capteurs 10%. Vue arrière droite. De gauche à droite et de bas en haut : source originale (max=1), MN (max=0.09), HEAT (max=0.12) et TV (max=0.19).

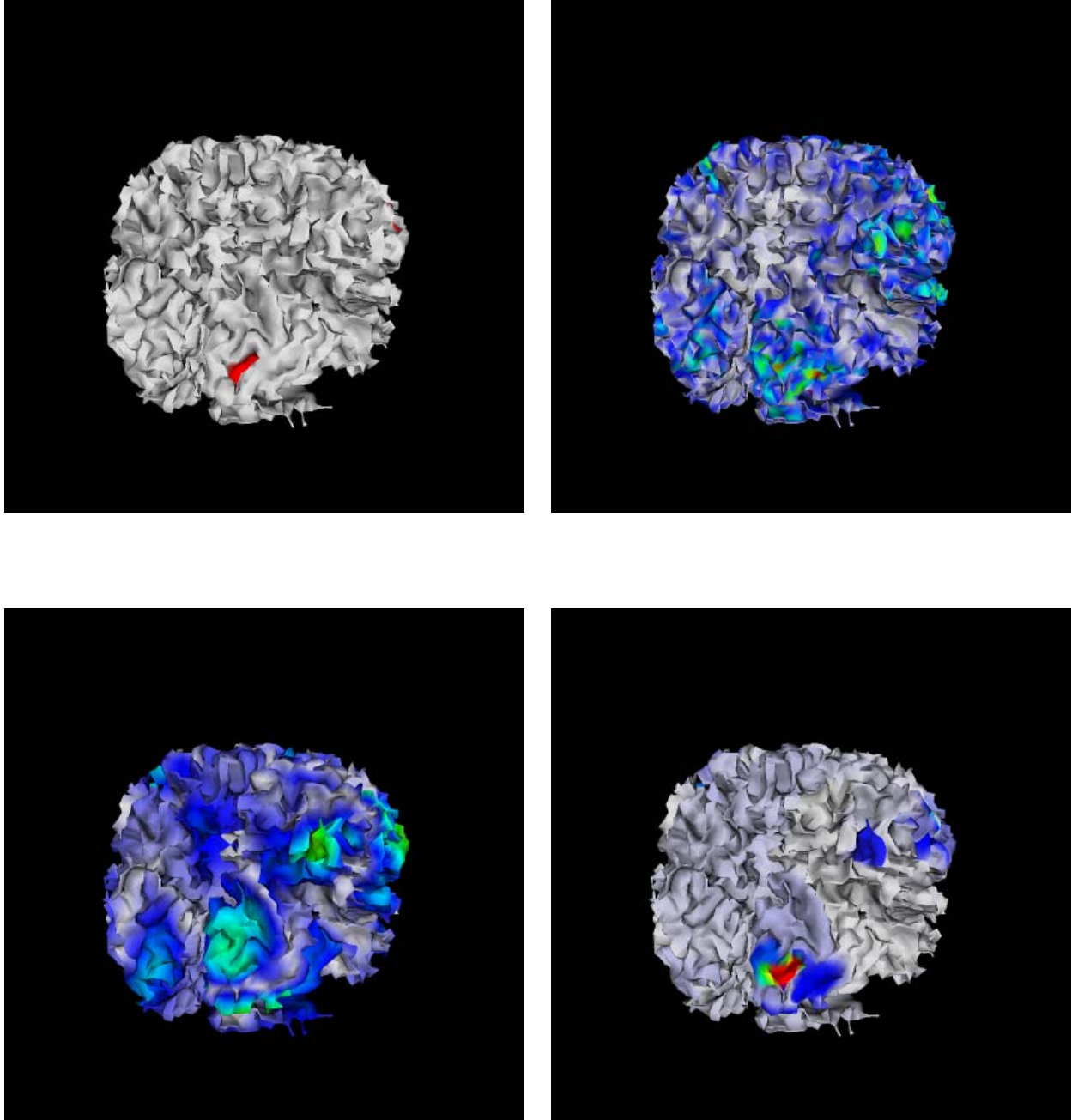


FIG. D.30 – Reconstruction de 3 patches d'activité. Niveau de bruit sur les capteurs 20%. Vue arrière droite. De gauche à droite et de bas en haut : source originale (max=1), MN (max=0.09), HEAT (max=0.11) et TV (max=0.23).



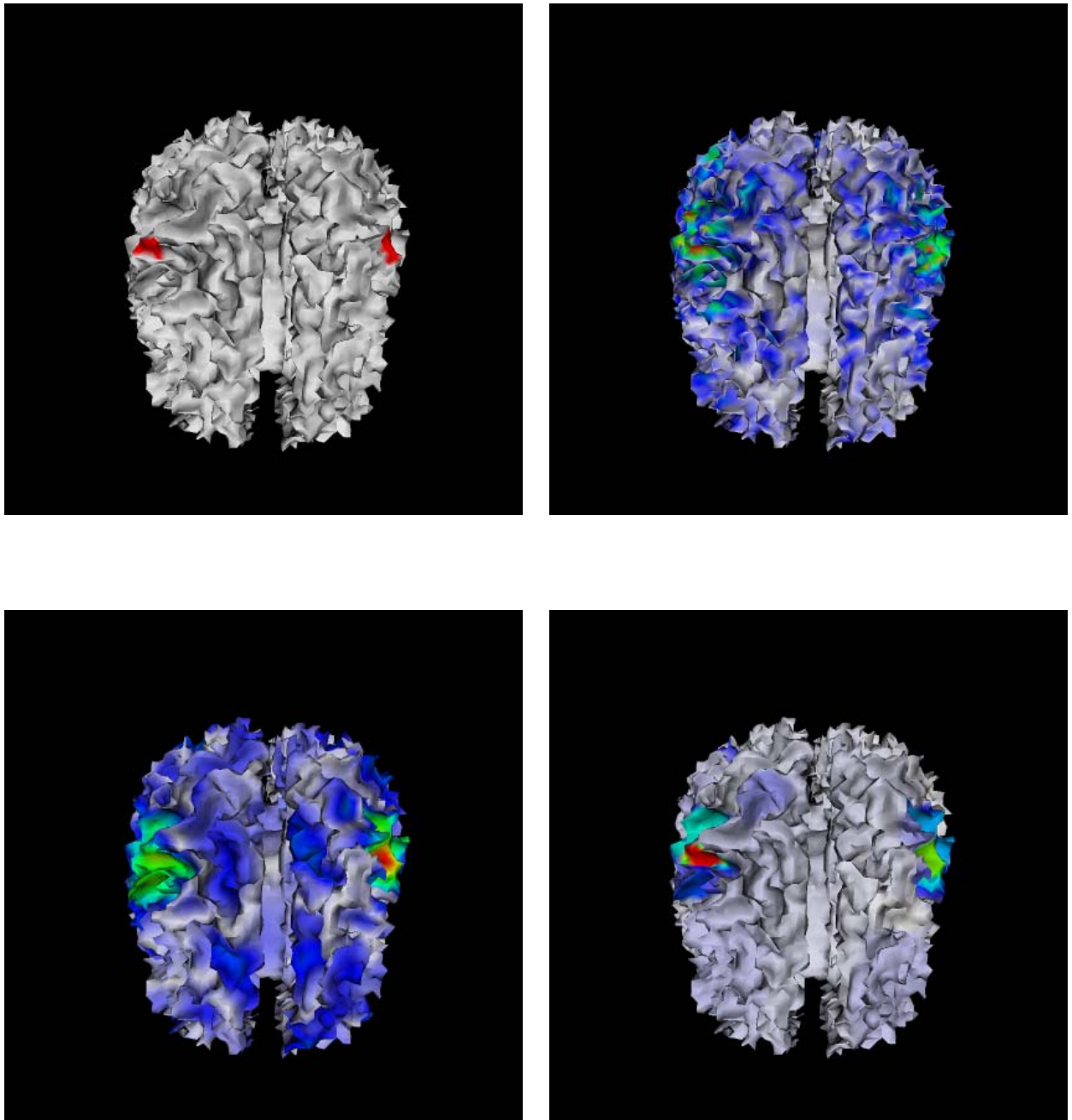


FIG. D.31 – Reconstruction de 3 patches d'activité. Niveau de bruit sur les capteurs 5%. Vue avant de dessus. De gauche à droite et de bas en haut : source originale ( $\max=1$ ), MN ( $\max=0.08$ ), HEAT ( $\max=0.24$ ) et TV ( $\max=0.21$ ).

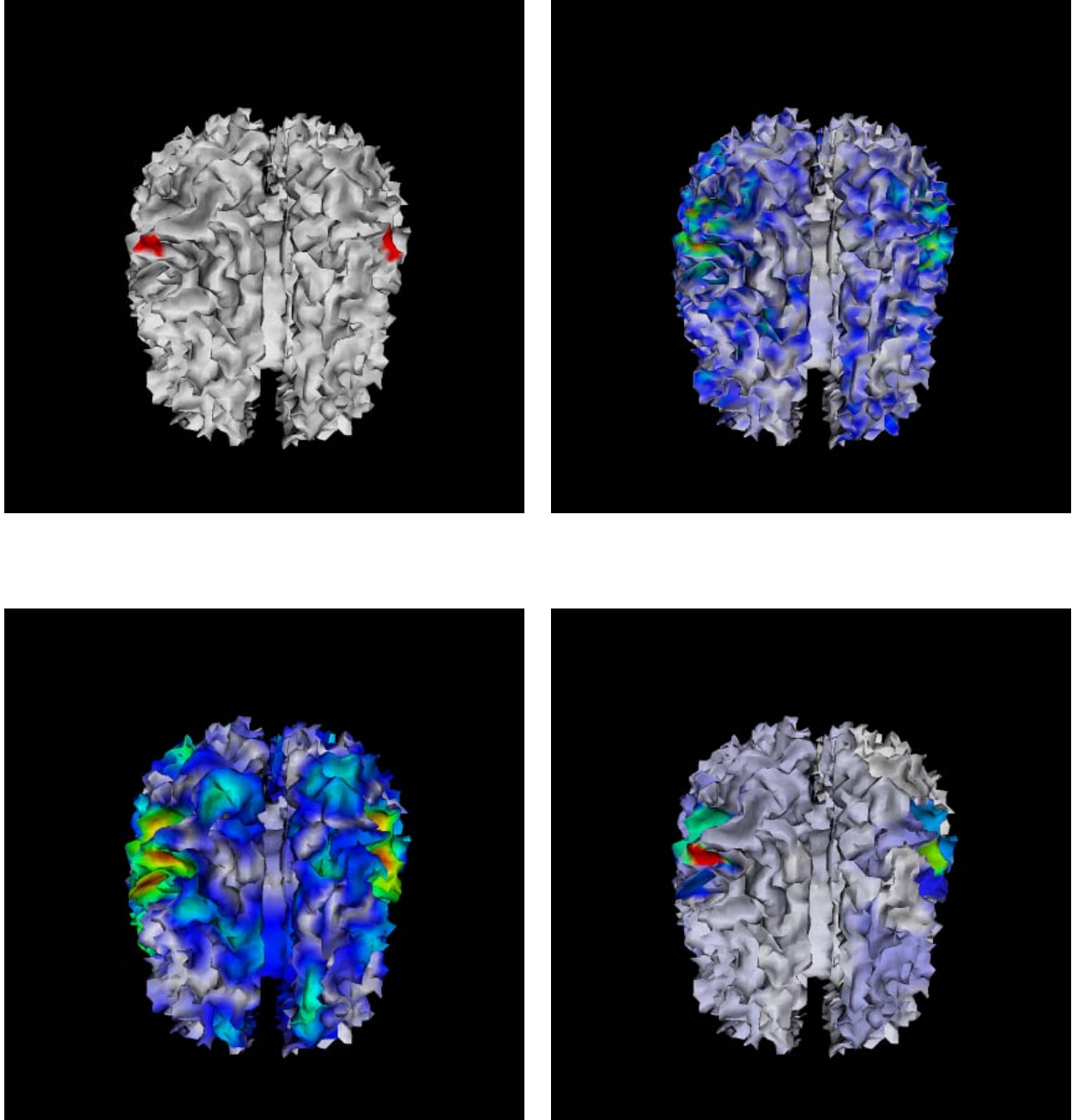


FIG. D.32 – Reconstruction de 3 patches d'activité. Niveau de bruit sur les capteurs 10%. Vue avant de dessus. De gauche à droite et de bas en haut : source originale (max=1), MN (max=0.09), HEAT (max=0.12) et TV (max=0.19).

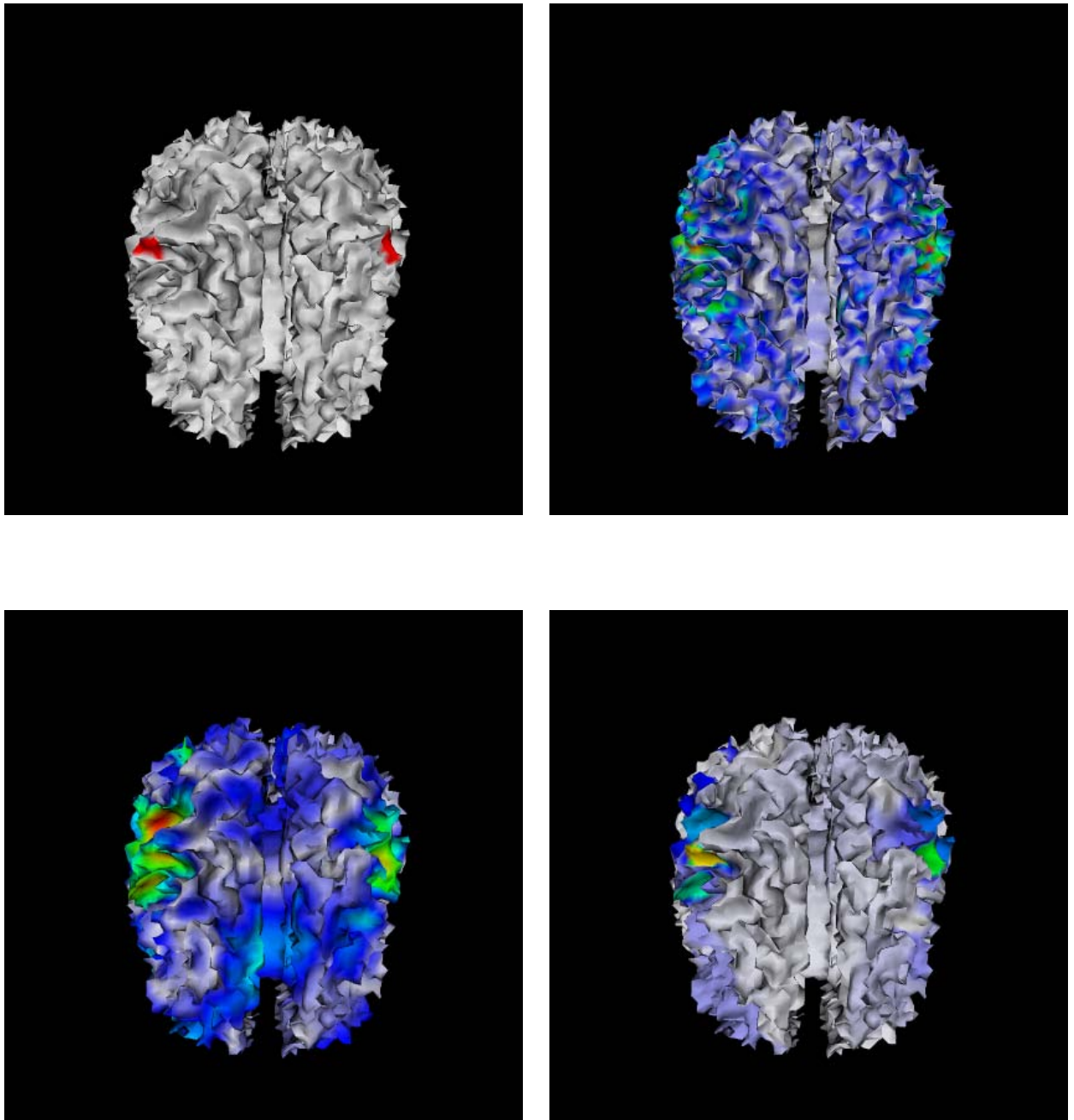


FIG. D.33 – Reconstruction de 3 patches d'activité. Niveau de bruit sur les capteurs 20%. Vue avant de dessus. De gauche à droite et de bas en haut : source originale ( $\max=1$ ), MN ( $\max=0.09$ ), HEAT ( $\max=0.11$ ) et TV ( $\max=0.23$ ).

## **D.2 Problème inverse EEG**

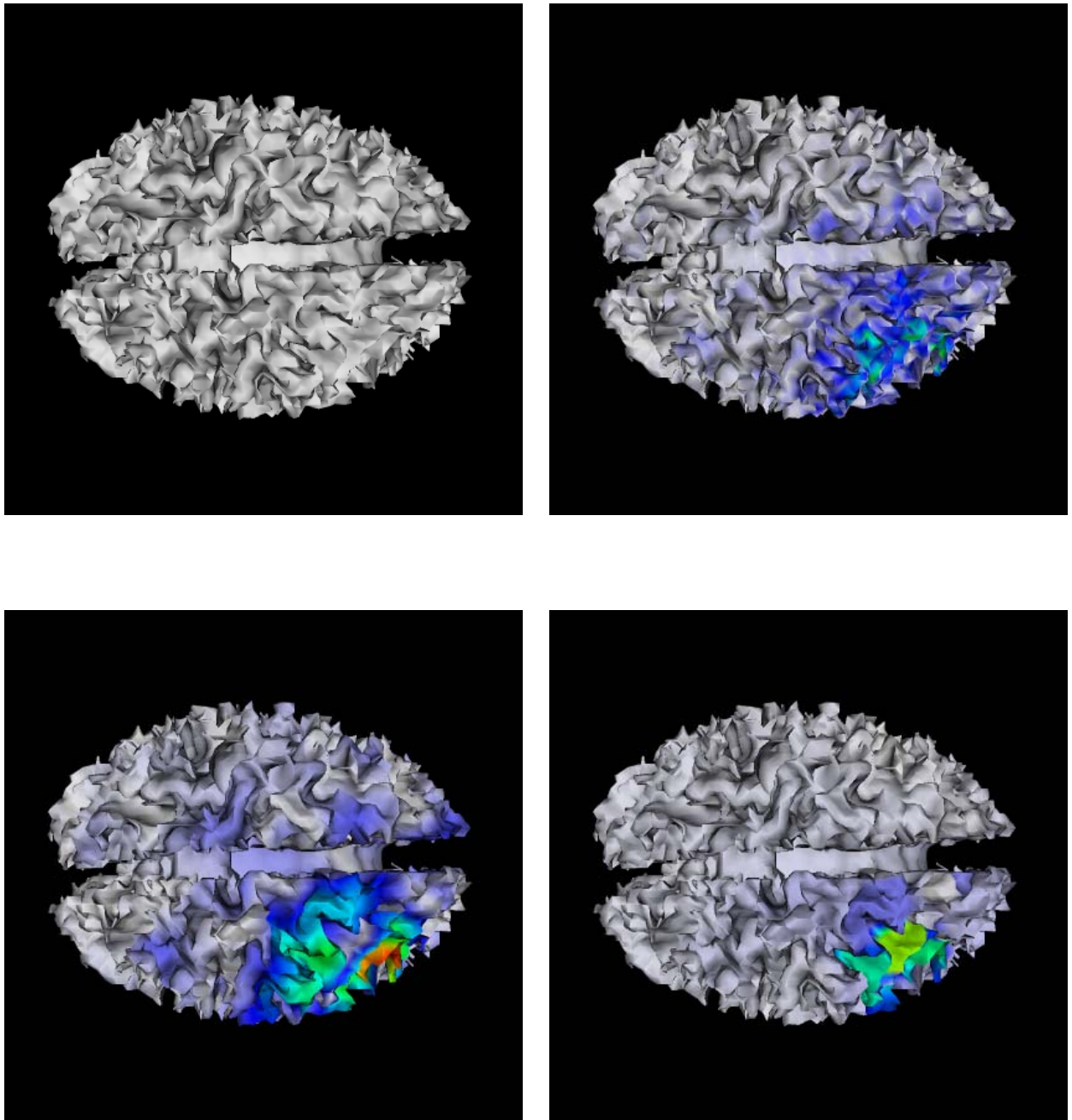


FIG. D.34 – Reconstruction de 1 patch d'activité. Niveau de bruit sur les capteurs 0%. Vue de dessus. De gauche à droite et de bas en haut : source originale (max=1), C-MN (max=0.19), C-HEAT (max=0.18) et C-TV (max=0.21).



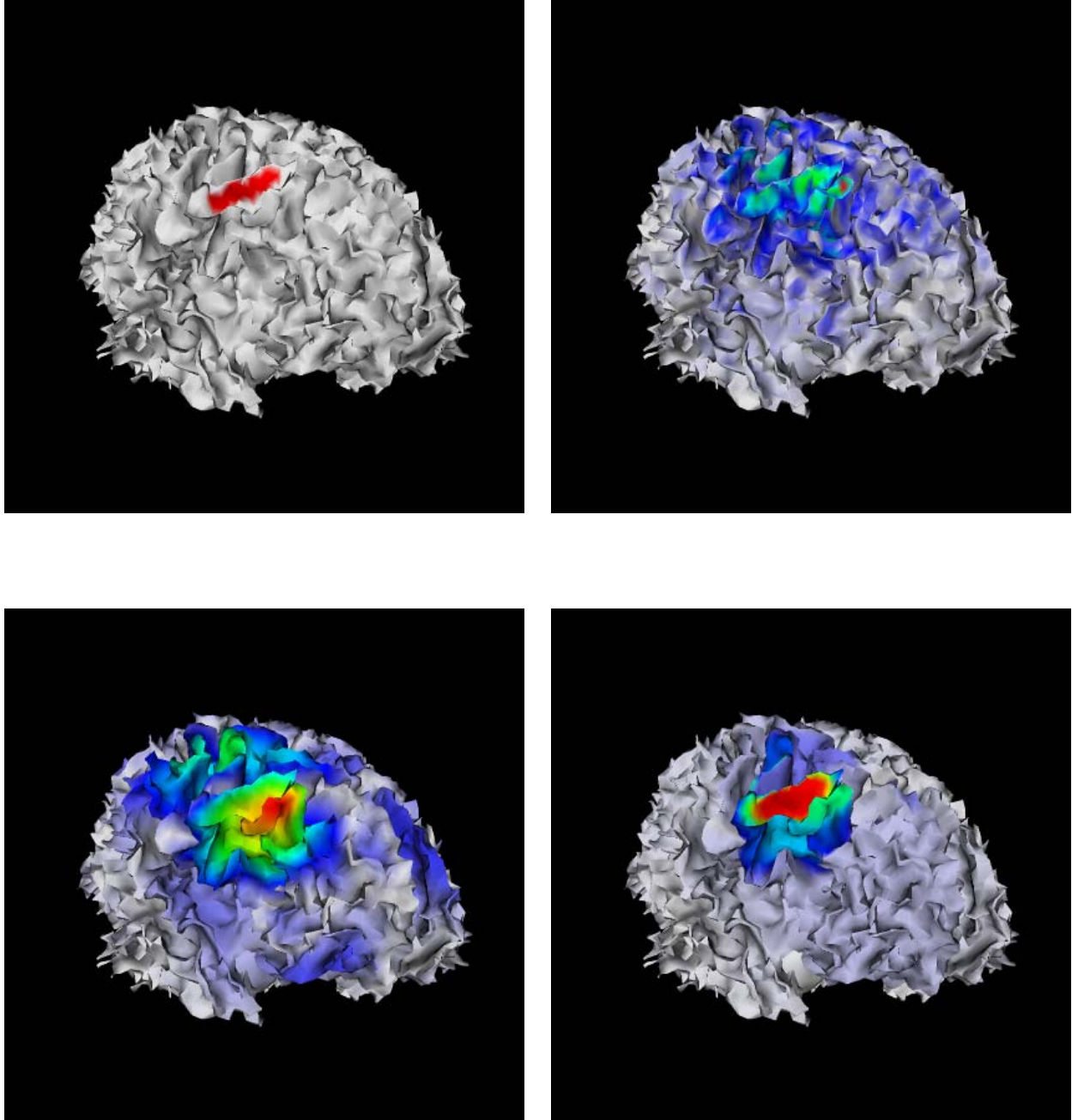


FIG. D.35 – Reconstruction de 1 patch d'activité. Niveau de bruit sur les capteurs 0%.  
Vue avant gauche. De gauche à droite et de bas en haut : source originale (max=1), C-MN  
(max=0.19), C-HEAT (max=0.18) et C-TV (max=0.21).

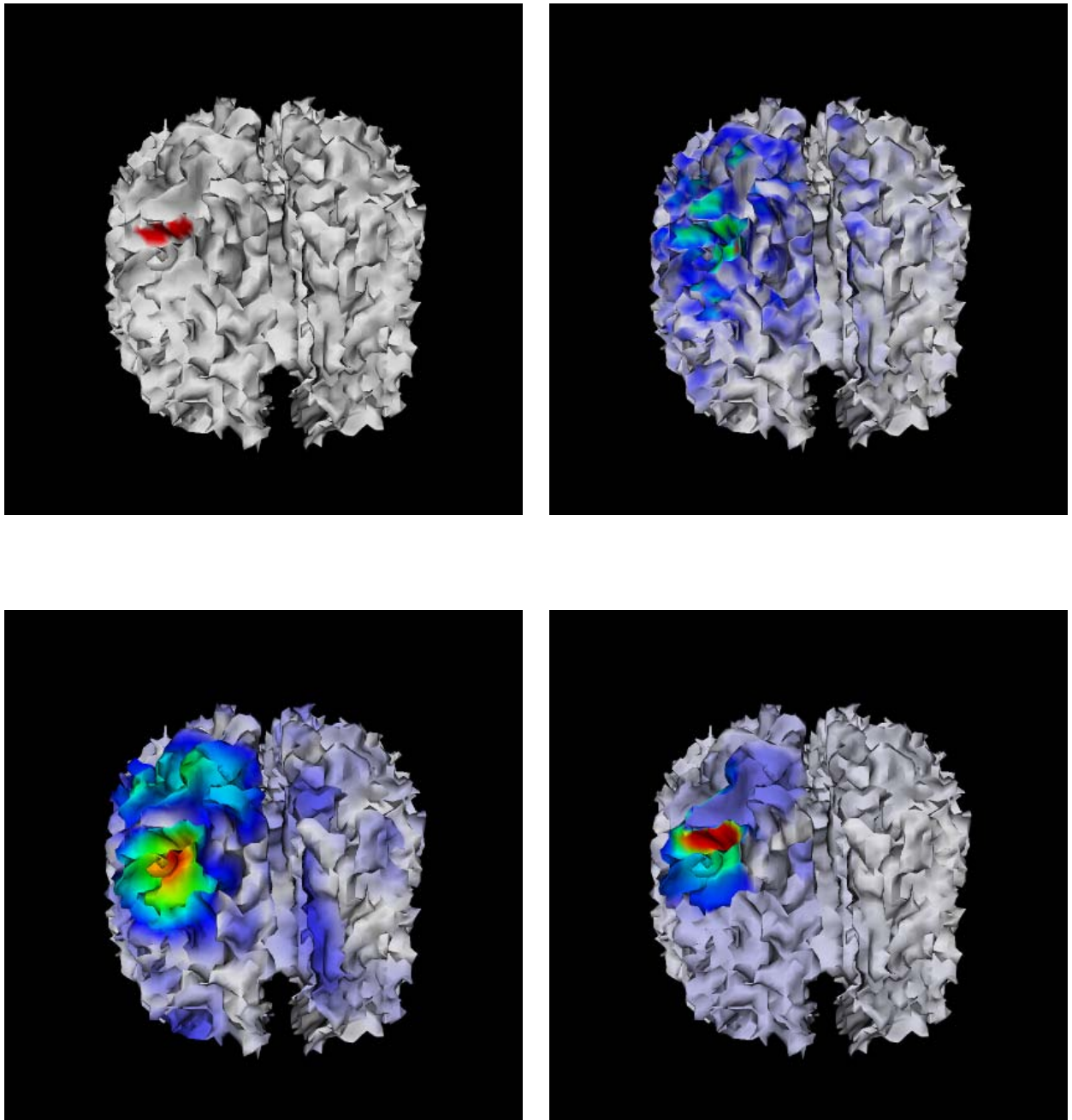


FIG. D.36 – Reconstruction de 1 patch d'activité. Niveau de bruit sur les capteurs 0%. Vue avant de dessus. De gauche à droite et de bas en haut : source originale (max=1), C-MN (max=0.19), C-HEAT (max=0.18) et C-TV (max=0.21).

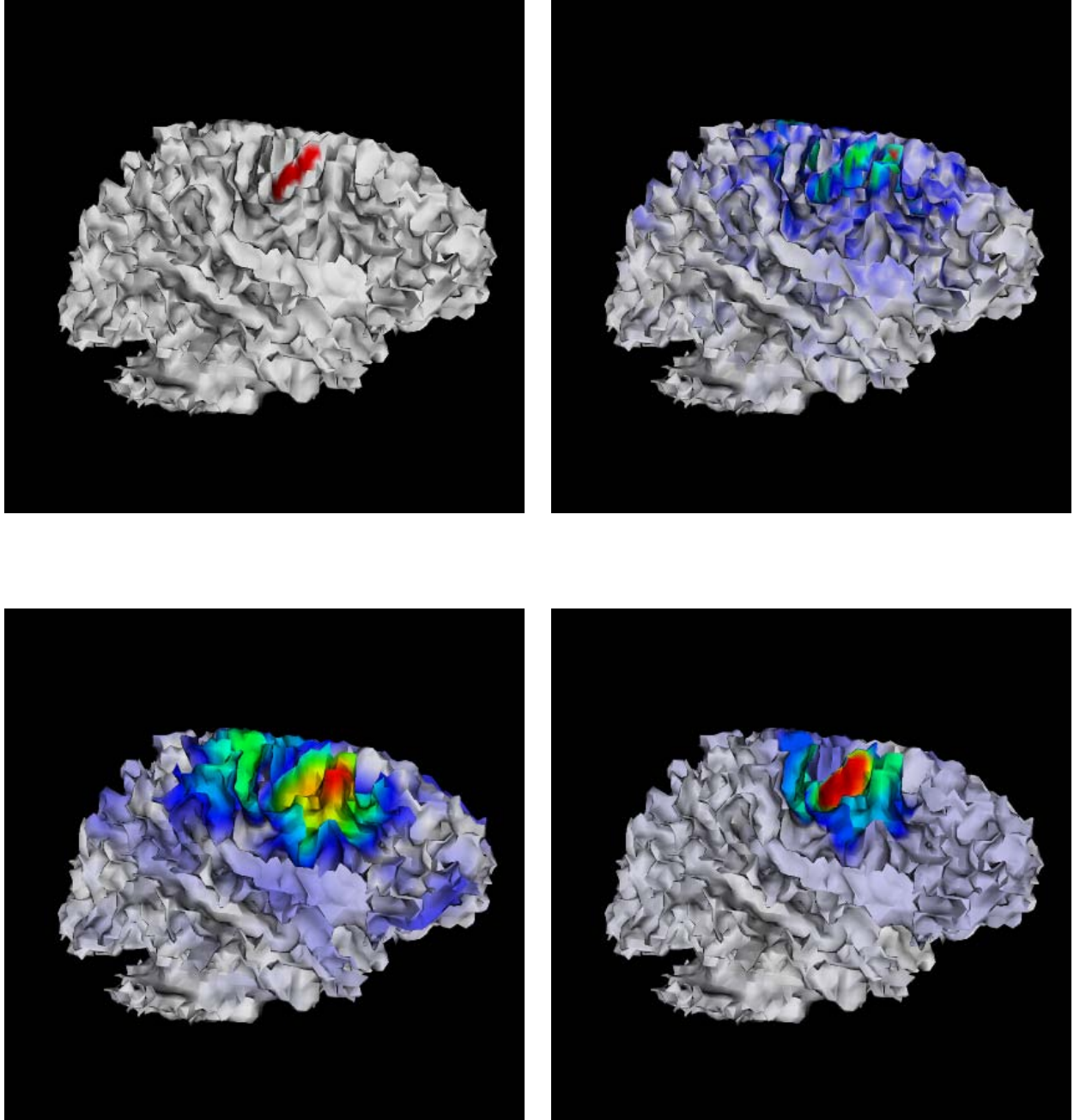


FIG. D.37 – Reconstruction de 1 patch d'activité. Niveau de bruit sur les capteurs 0%. Vue latérale droite. De gauche à droite et de bas en haut : source originale (max=1), C-MN (max=0.19), C-HEAT (max=0.18) et C-TV (max=0.21).



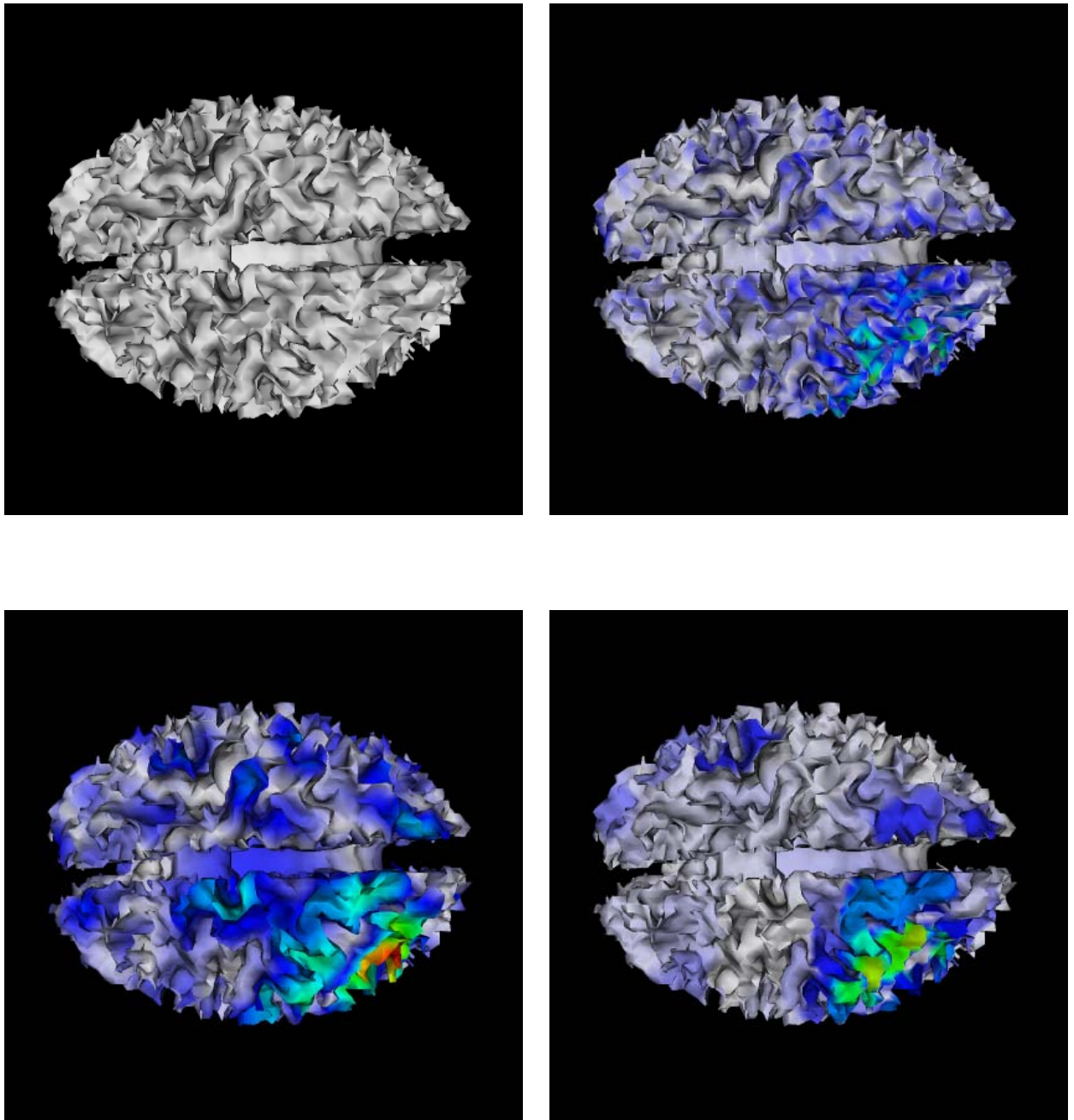


FIG. D.38 – Reconstruction de 1 patch d'activité. Niveau de bruit sur les capteurs 5%. Vue de dessus. De gauche à droite et de bas en haut : source originale (max=1), MN (max=0.14), HEAT (max=0.19) et TV (max=0.10).

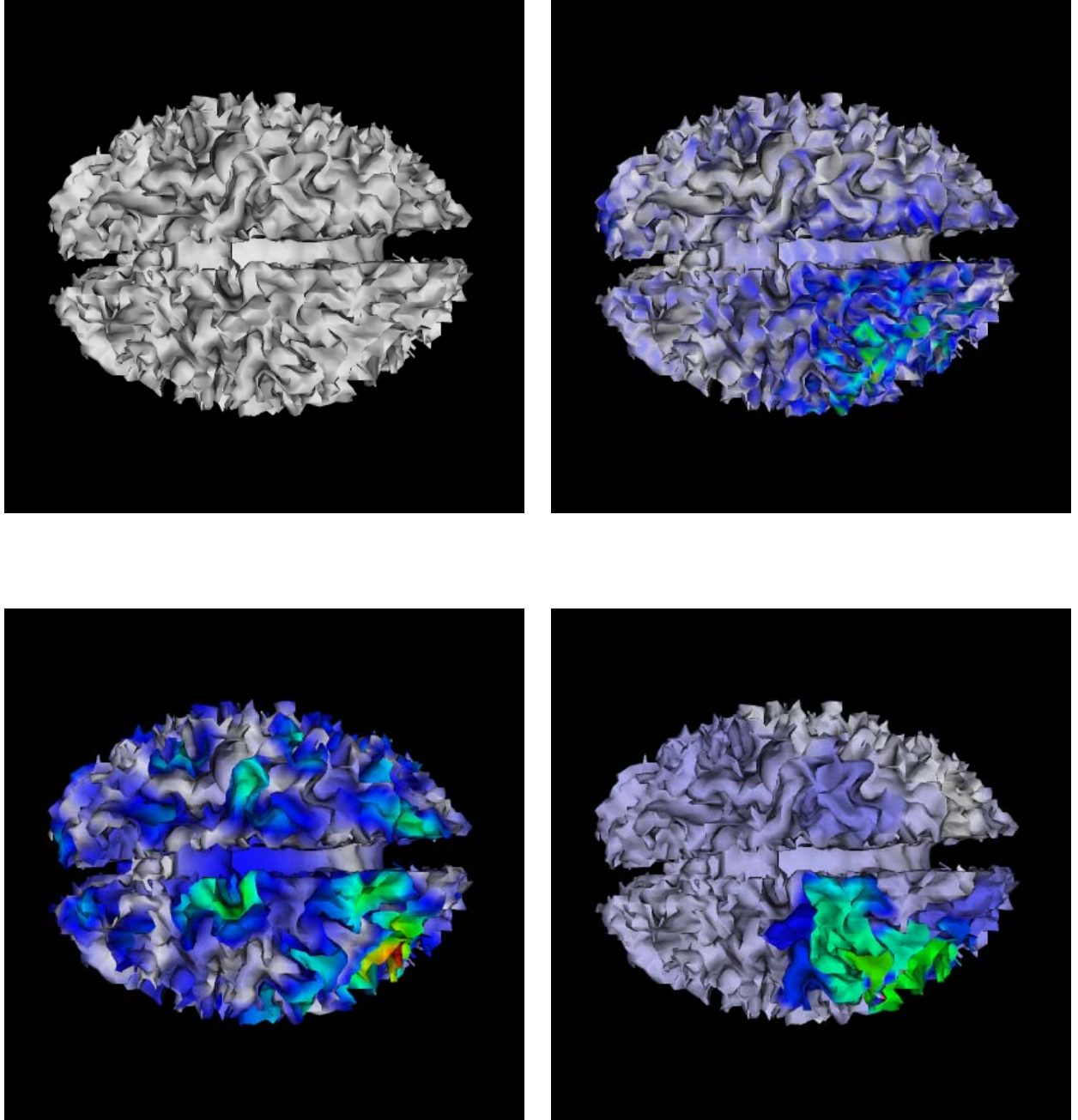


FIG. D.39 – Reconstruction de 1 patch d'activité. Niveau de bruit sur les capteurs 10%. Vue de dessus. De gauche à droite et de bas en haut : source originale (max=1), MN (max=0.11), HEAT (max=0.24) et TV (max=0.11).

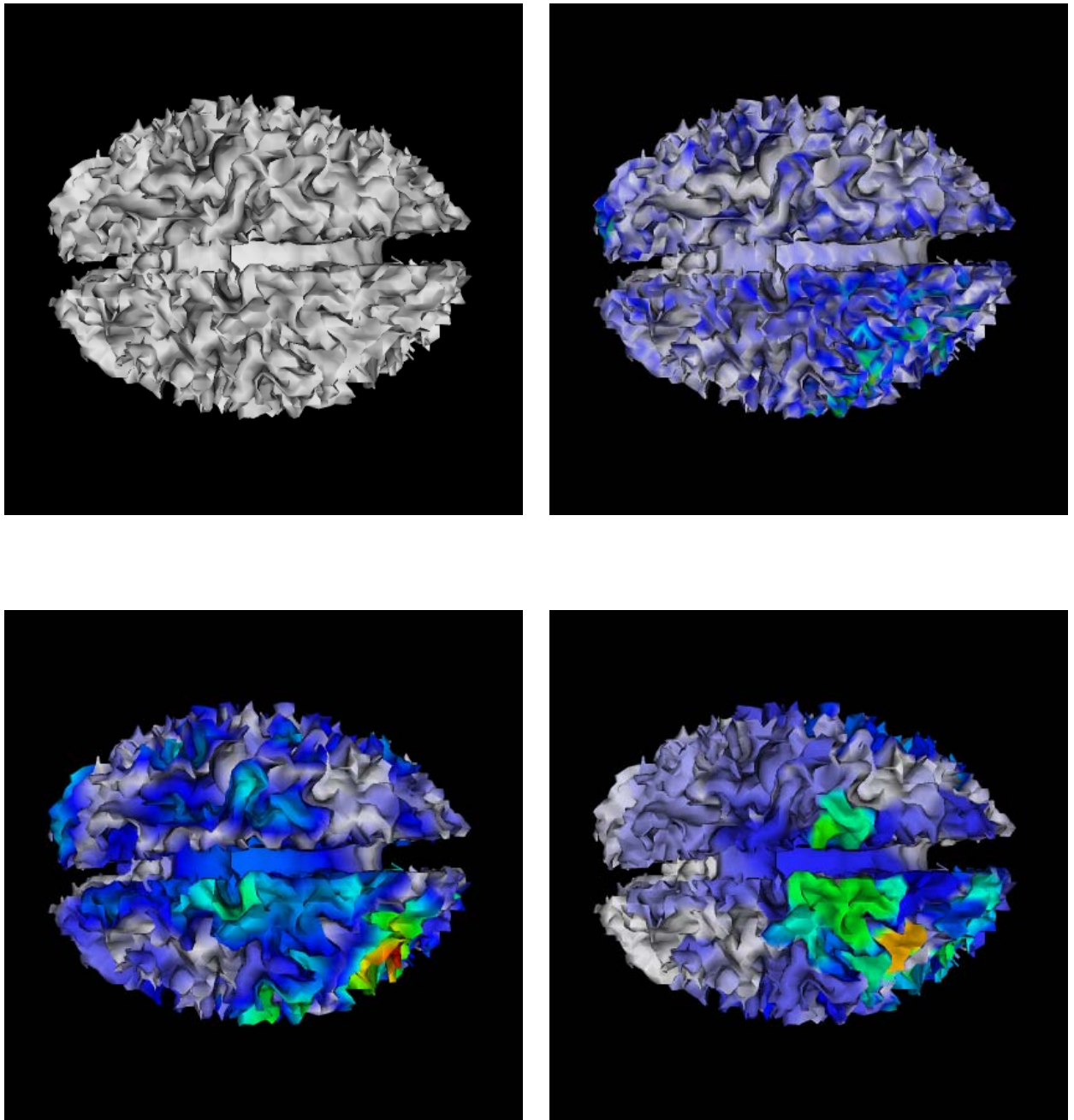


FIG. D.40 – Reconstruction de 1 patch d'activité. Niveau de bruit sur les capteurs 20%. Vue de dessus. De gauche à droite et de bas en haut : source originale (max=1), MN (max=0.10), HEAT (max=0.17) et TV (max=0.05).



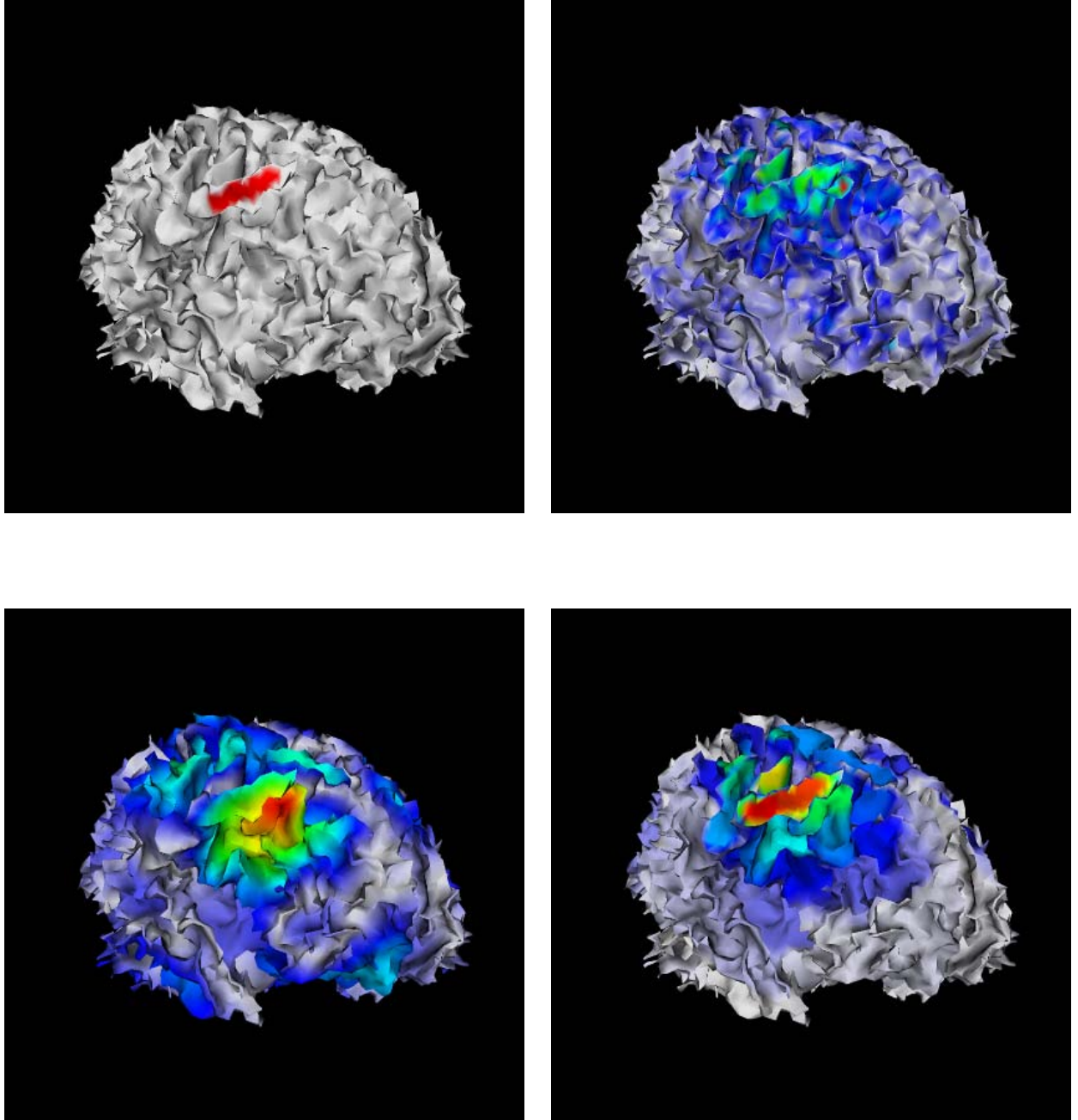


FIG. D.41 – Reconstruction de 1 patch d'activité. Niveau de bruit sur les capteurs 5%. Vue avant gauche. De gauche à droite et de bas en haut : source originale (max=1), MN (max=0.14), HEAT (max=0.19) et TV (max=0.10).

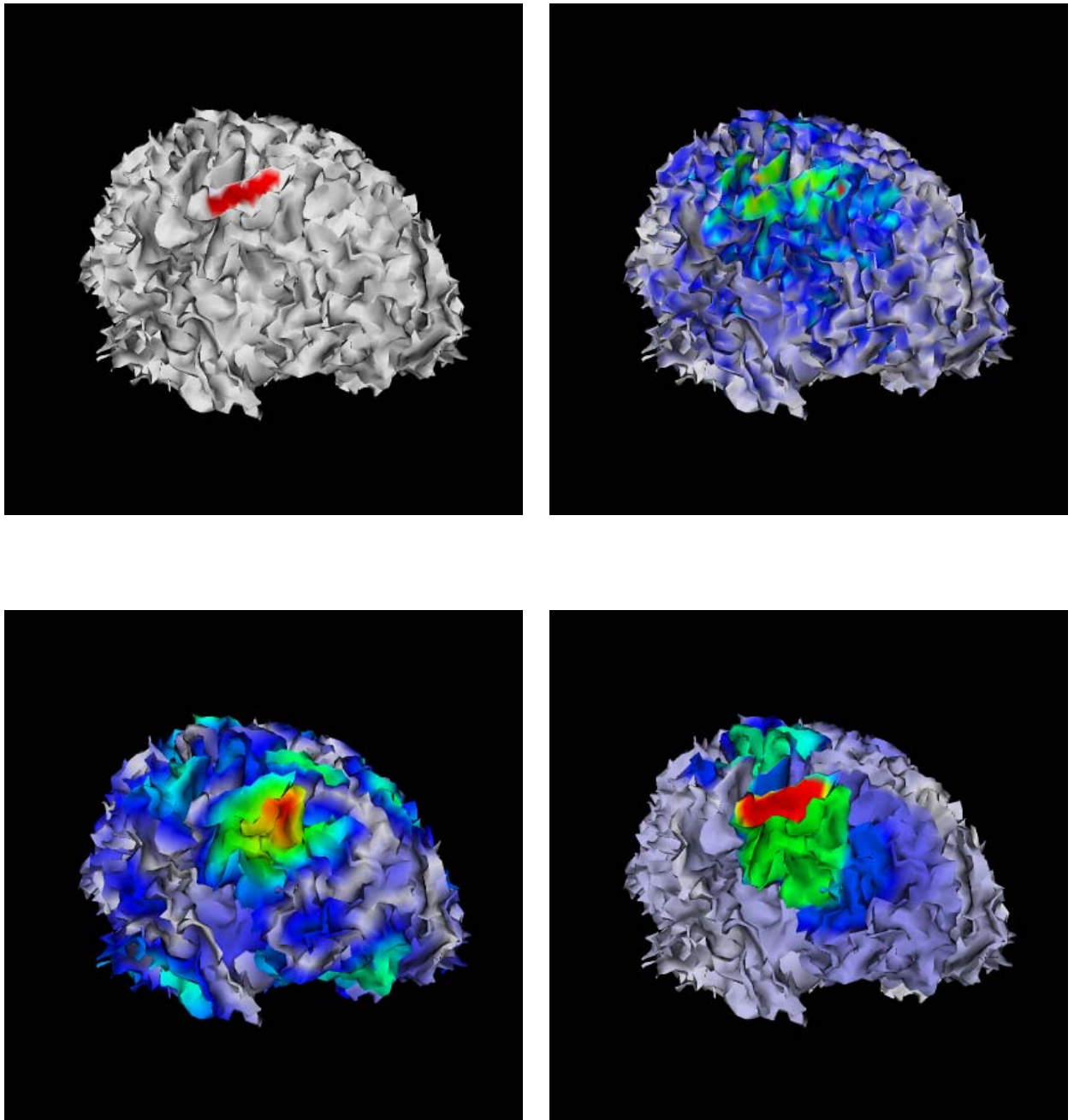


FIG. D.42 – Reconstruction de 1 patch d'activité. Niveau de bruit sur les capteurs 10%. Vue avant gauche. De gauche à droite et de bas en haut : source originale (max=1), MN (max=0.11), HEAT (max=0.24) et TV (max=0.11).

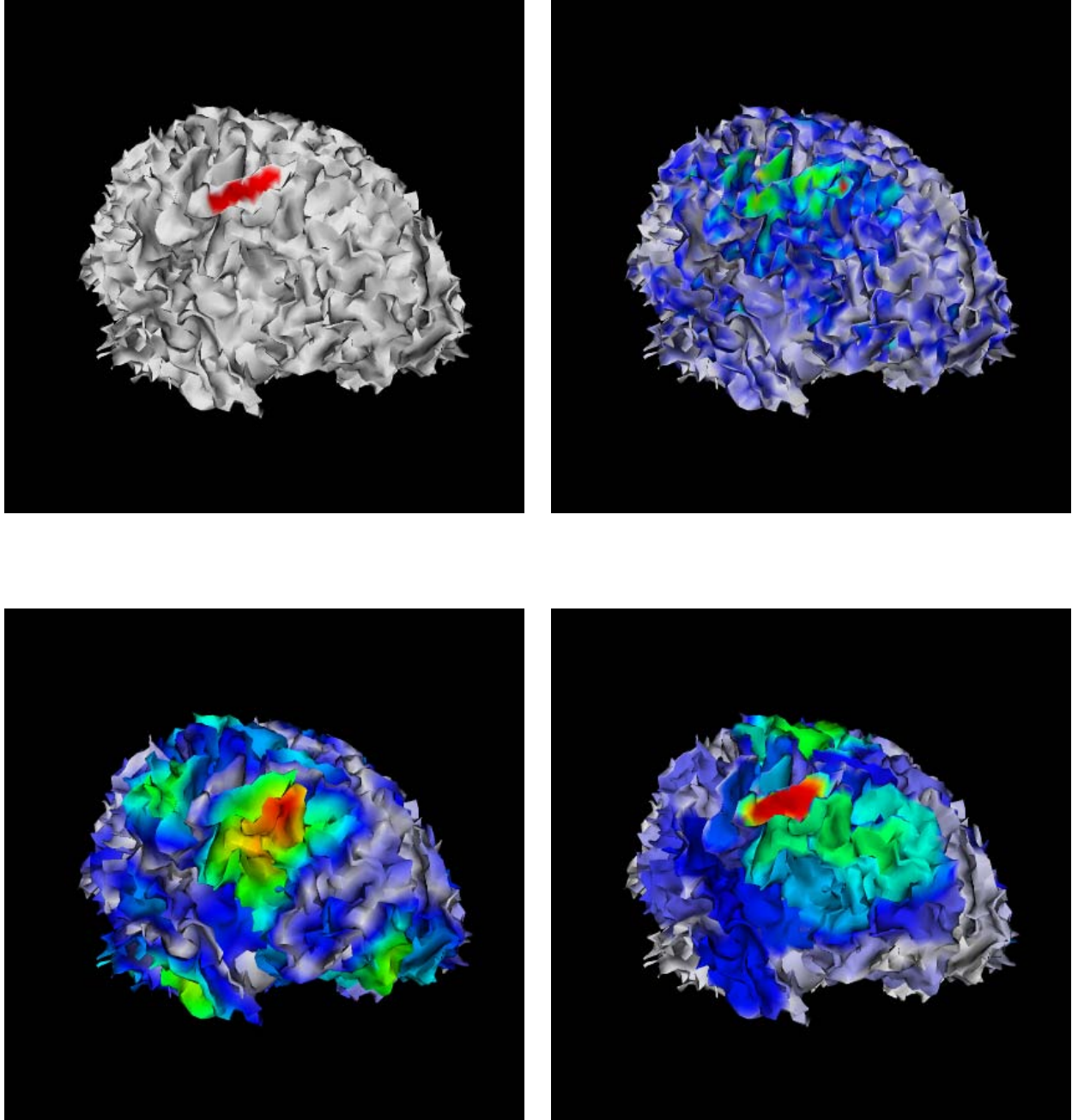


FIG. D.43 – Reconstruction de 1 patch d'activité. Niveau de bruit sur les capteurs 20%. Vue avant gauche. De gauche à droite et de bas en haut : source originale (max=1), MN (max=0.10), HEAT (max=0.17) et TV (max=0.05).

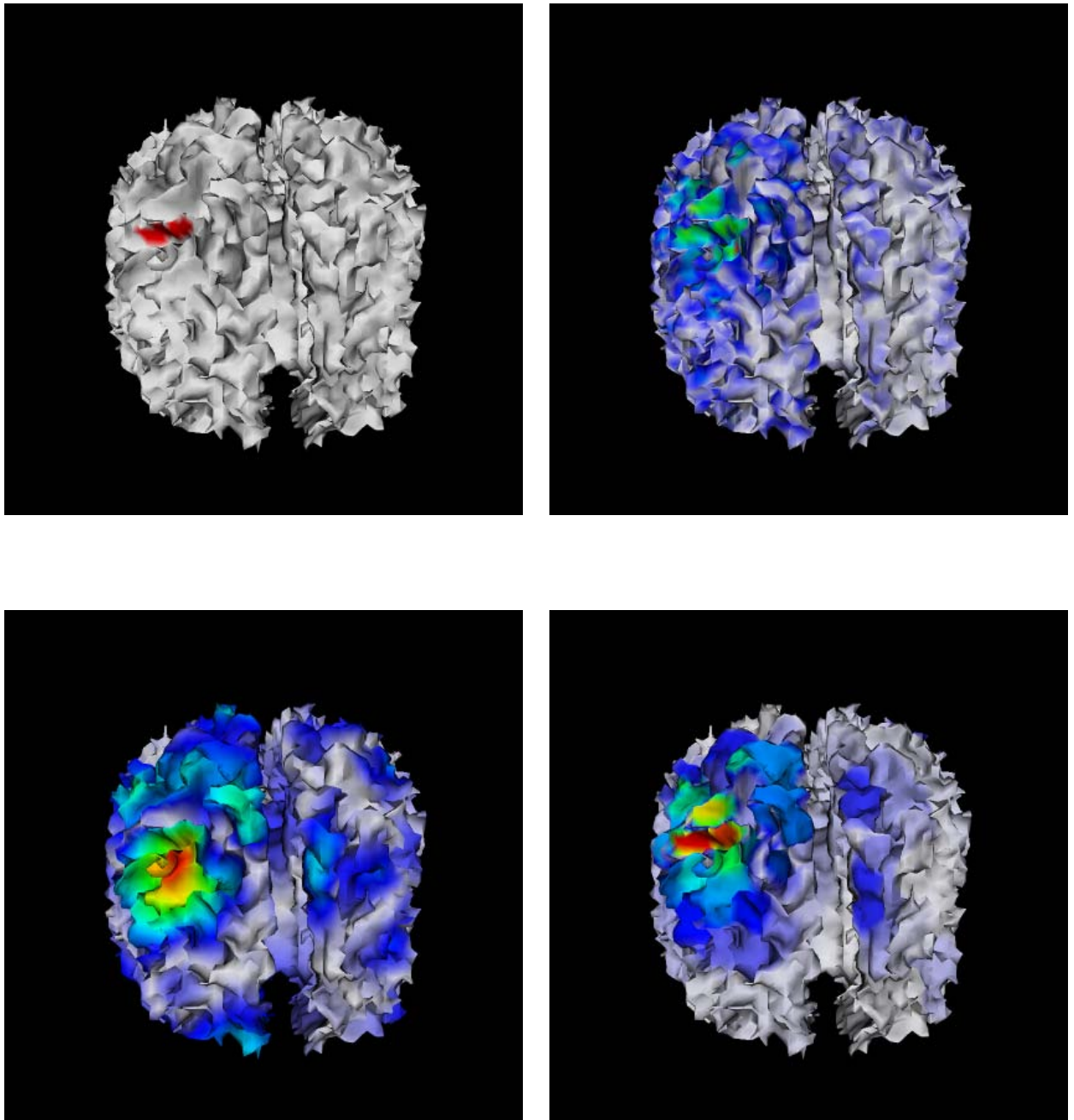


FIG. D.44 – Reconstruction de 1 patch d'activité. Niveau de bruit sur les capteurs 5%. Vue avant de dessus. De gauche à droite et de bas en haut : source originale (max=1), MN (max=0.14), HEAT (max=0.19) et TV (max=0.10).



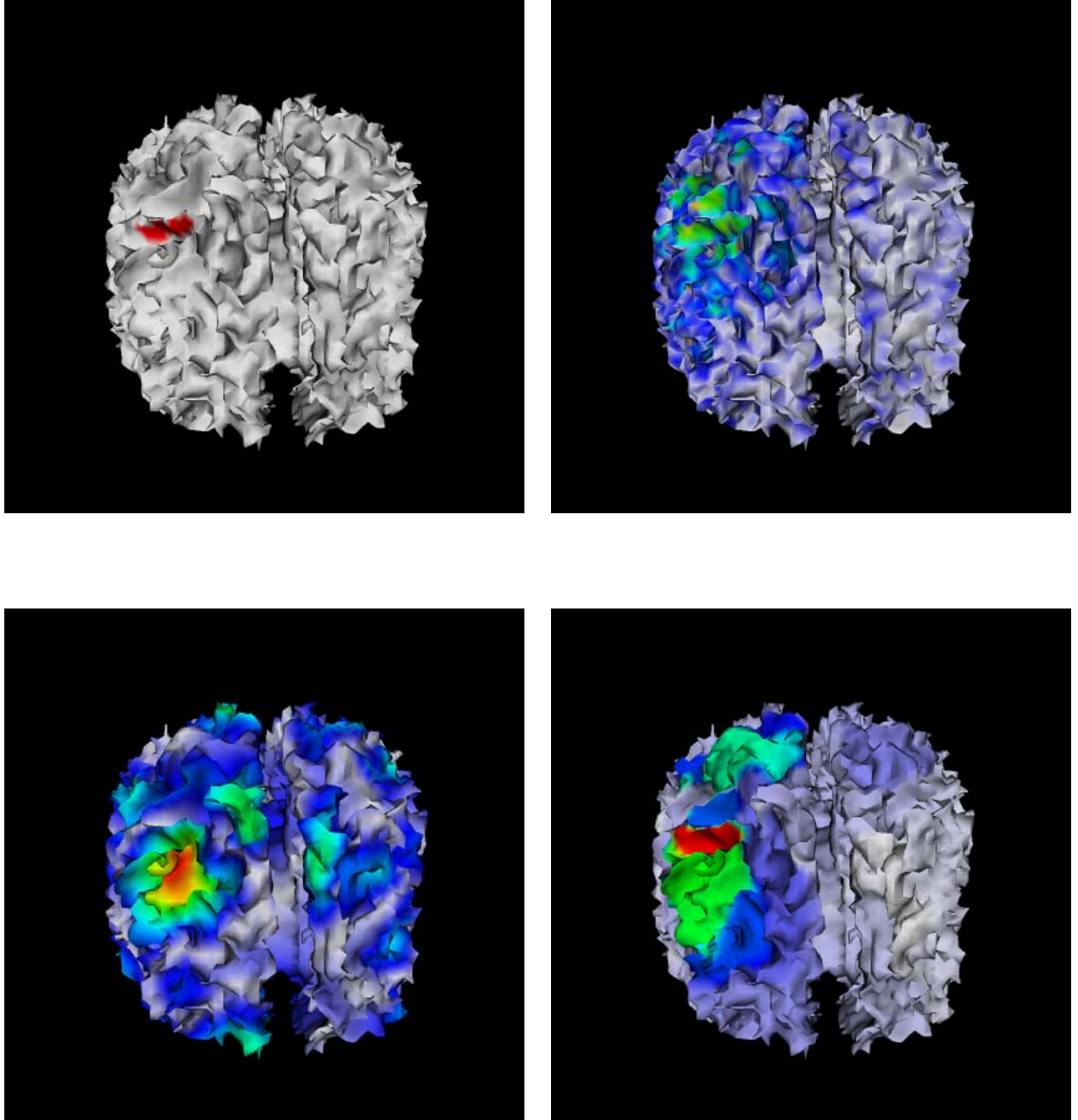


FIG. D.45 – Reconstruction de 1 patch d'activité. Niveau de bruit sur les capteurs 10%. Vue avant de dessus. De gauche à droite et de bas en haut : source originale (max=1), MN (max=0.11), HEAT (max=0.24) et TV (max=0.11).



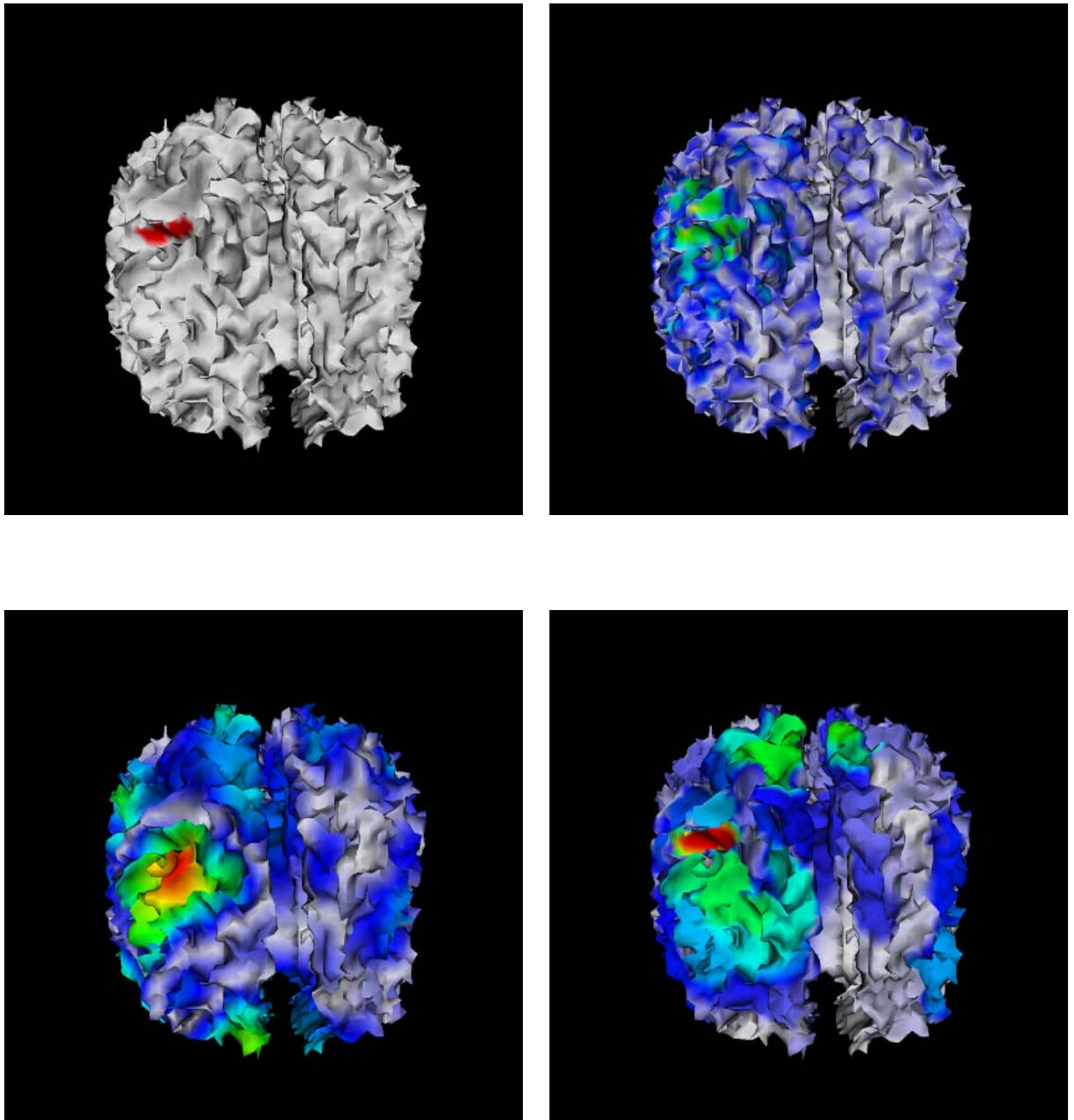


FIG. D.46 – Reconstruction de 1 patch d'activité. Niveau de bruit sur les capteurs 20%. Vue avant de dessus. De gauche à droite et de bas en haut : source originale (max=1), MN (max=0.10), HEAT (max=0.17) et TV (max=0.05).

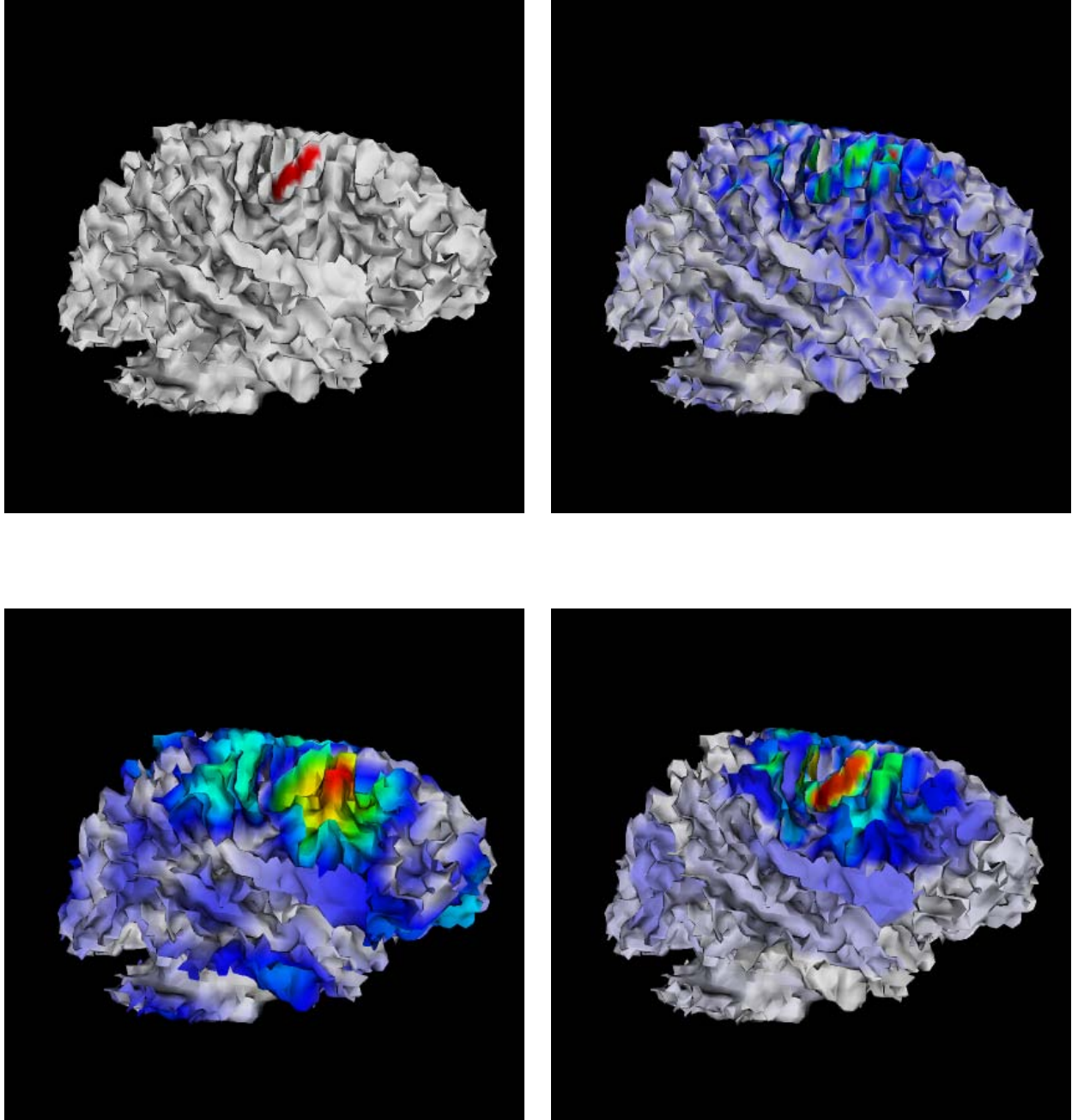


FIG. D.47 – Reconstruction de 1 patch d'activité. Niveau de bruit sur les capteurs 5%. Vue latérale droite. De gauche à droite et de bas en haut : source originale (max=1), MN (max=0.14), HEAT (max=0.19) et TV (max=0.10).

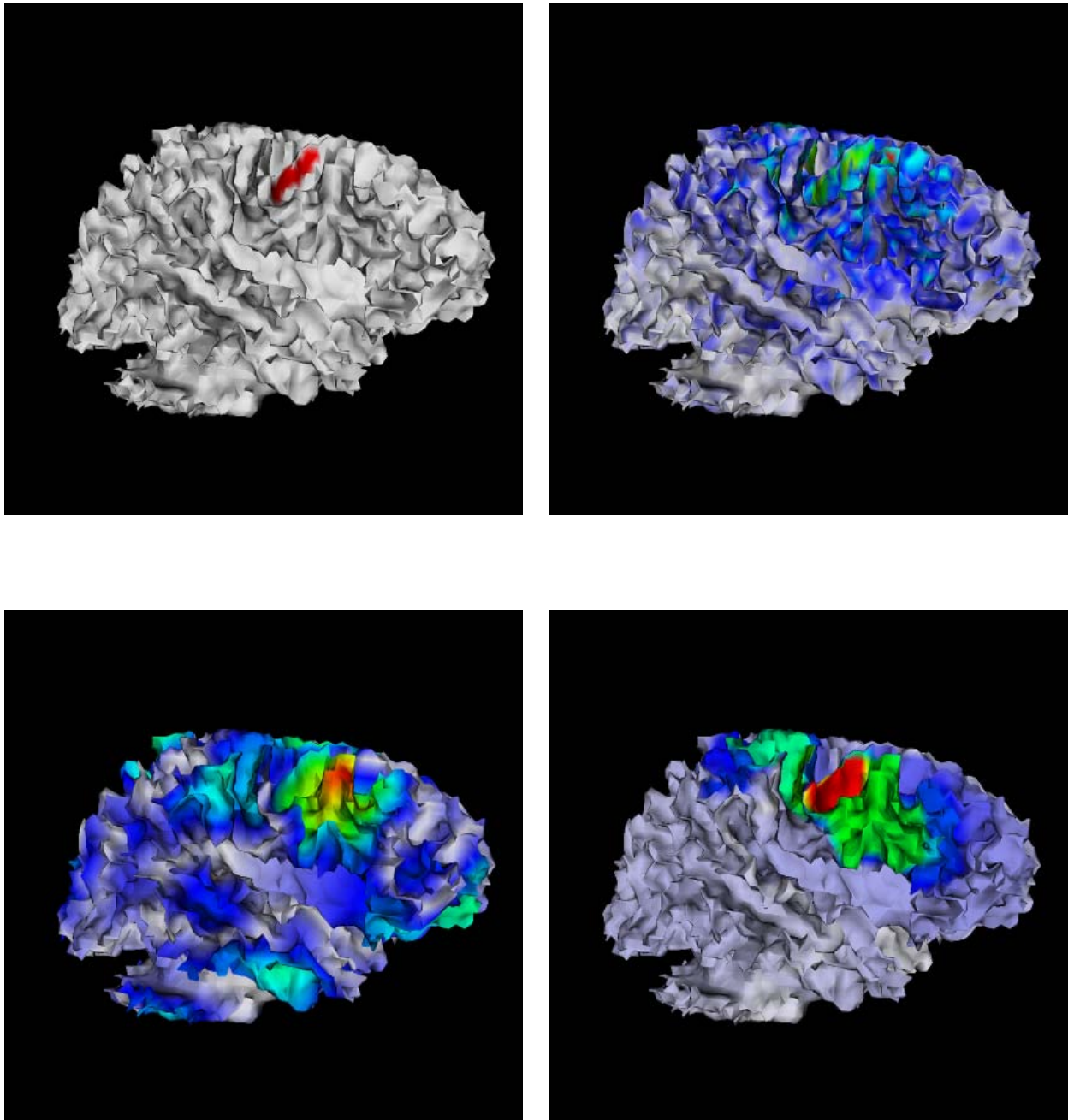


FIG. D.48 – Reconstruction de 1 patch d'activité. Niveau de bruit sur les capteurs 10%. Vue latérale droite. De gauche à droite et de bas en haut : source originale (max=1), MN (max=0.11), HEAT (max=0.24) et TV (max=0.11).

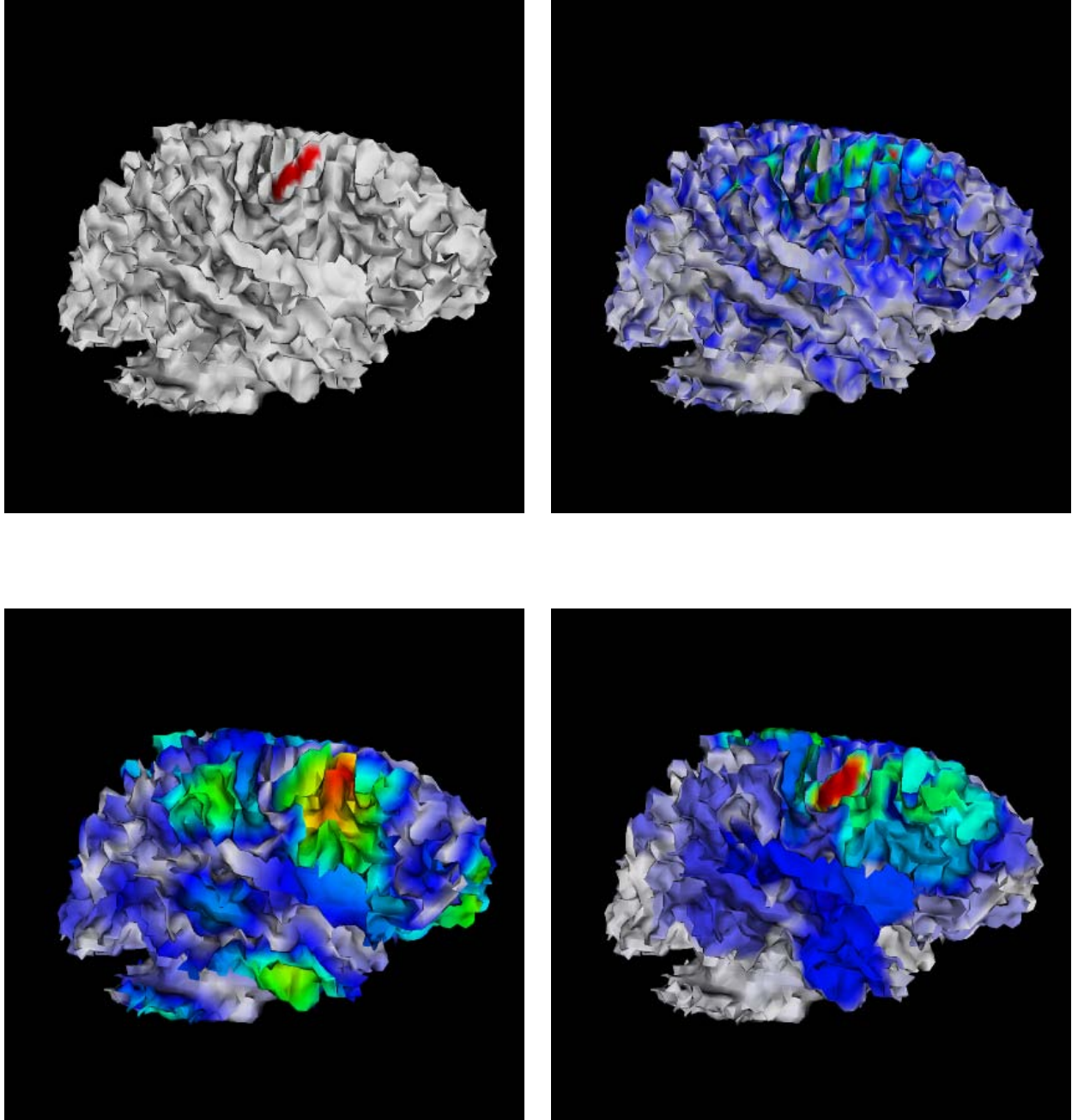


FIG. D.49 – Reconstruction de 1 patch d'activité. Niveau de bruit sur les capteurs 20%. Vue latérale droite. De gauche à droite et de bas en haut : source originale (max=1), MN (max=0.10), HEAT (max=0.17) et TV (max=0.05).



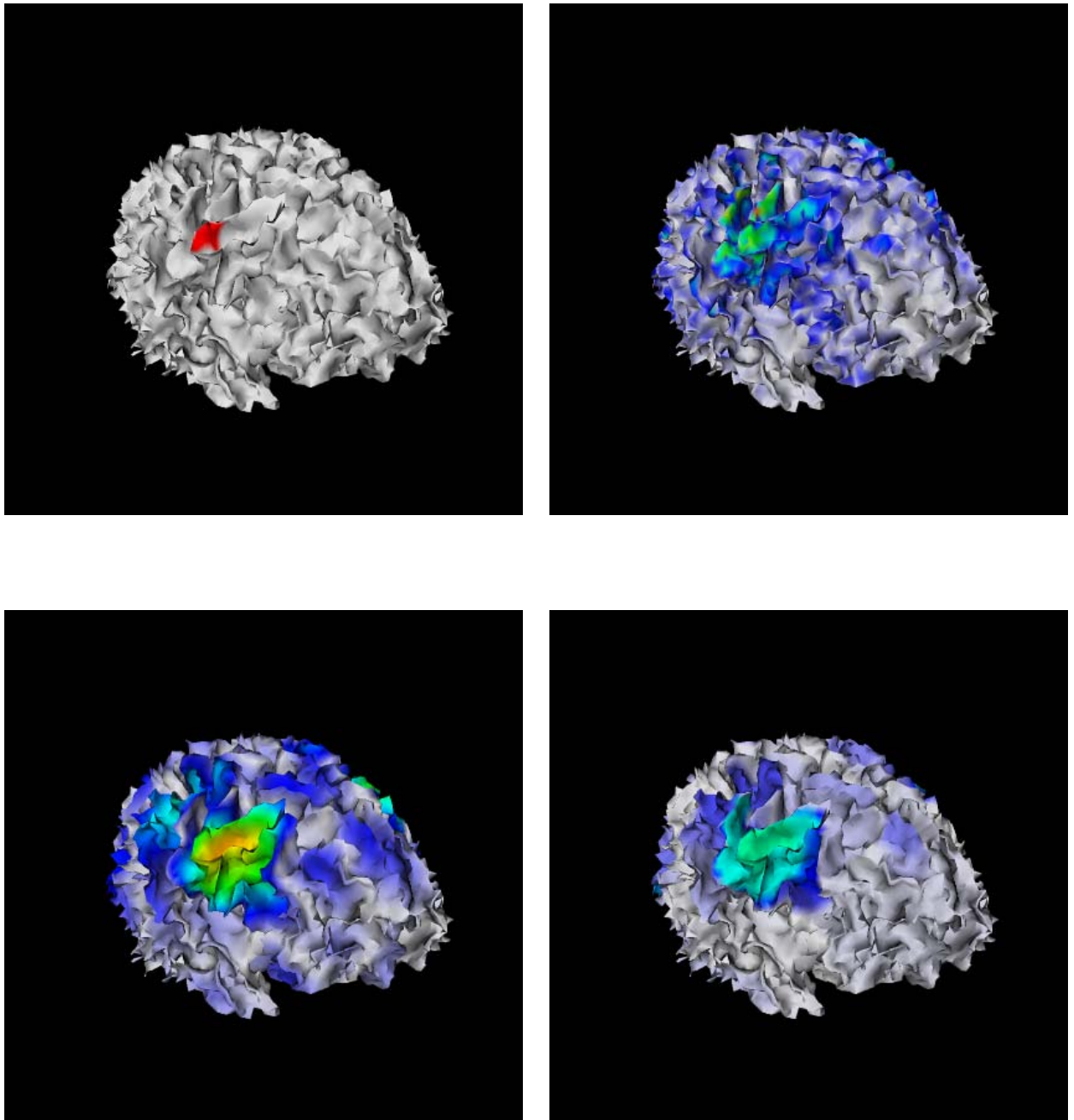


FIG. D.50 – Reconstruction de 3 patches d'activité. Niveau de bruit sur les capteurs 0%. Vue avant gauche. De gauche à droite et de bas en haut : source originale (max=1), C-MN (max=0.10), C-HEAT (max=0.12) et C-TV (max=0.18).

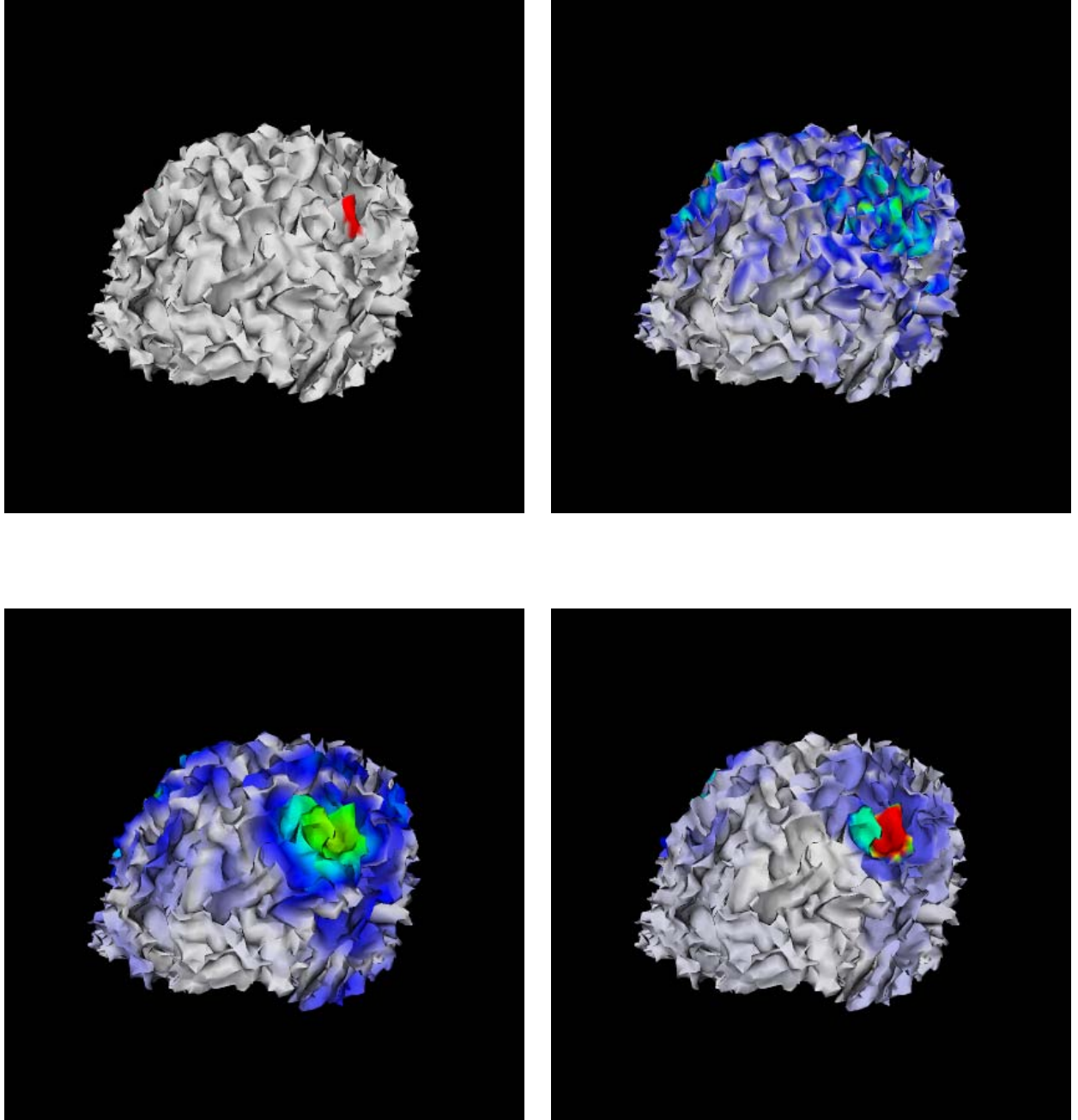


FIG. D.51 – Reconstruction de 3 patches d'activité. Niveau de bruit sur les capteurs 0%. Vue avant droite. De gauche à droite et de bas en haut : source originale ( $\max=1$ ), C-MN ( $\max=0.10$ ), C-HEAT ( $\max=0.12$ ) et C-TV ( $\max=0.18$ ).

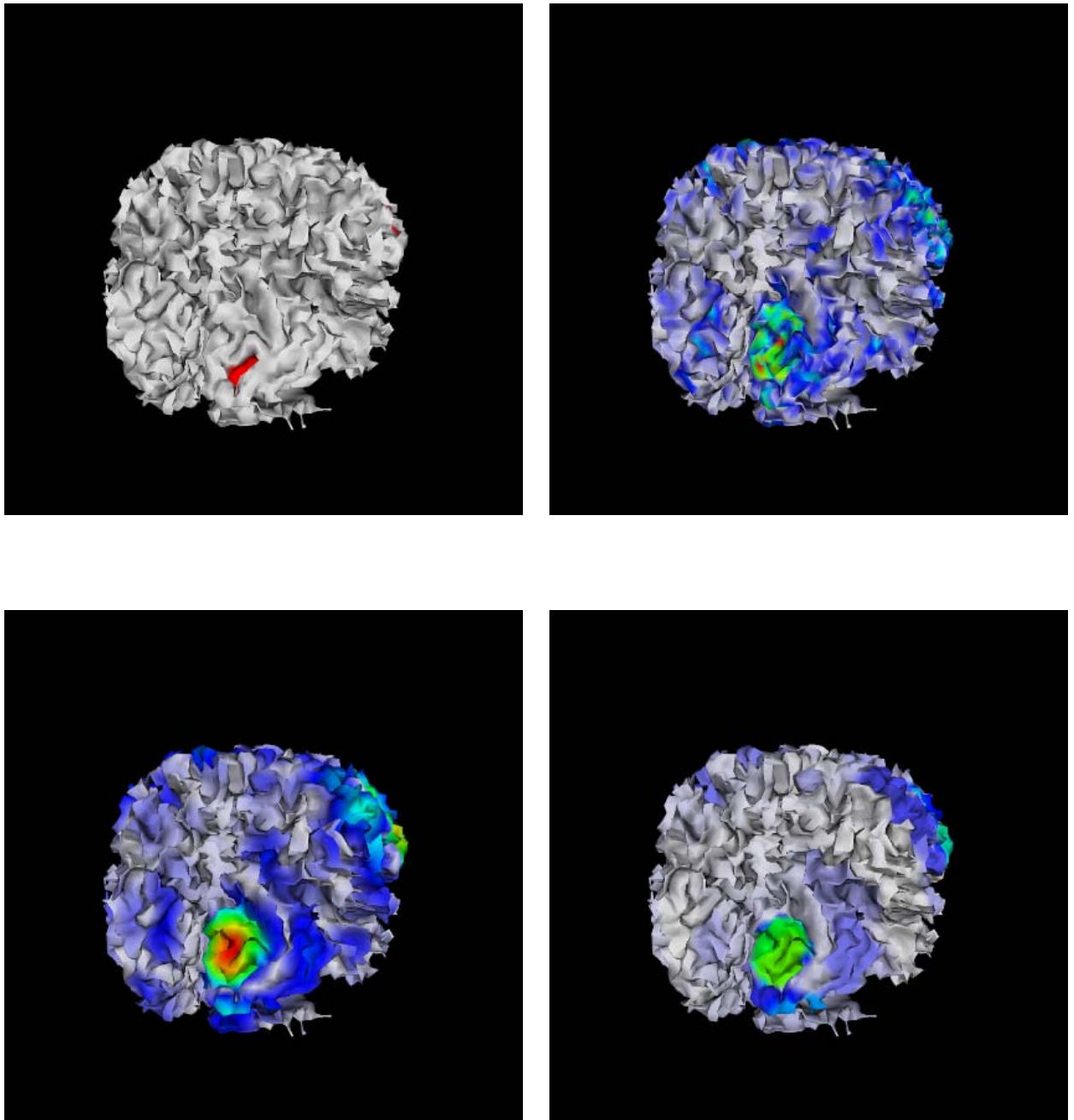


FIG. D.52 – Reconstruction de 3 patches d'activité. Niveau de bruit sur les capteurs 0%. Vue arrière droite. De gauche à droite et de bas en haut : source originale (max=1), C-MN (max=0.10), C-HEAT (max=0.12) et C-TV (max=0.18).



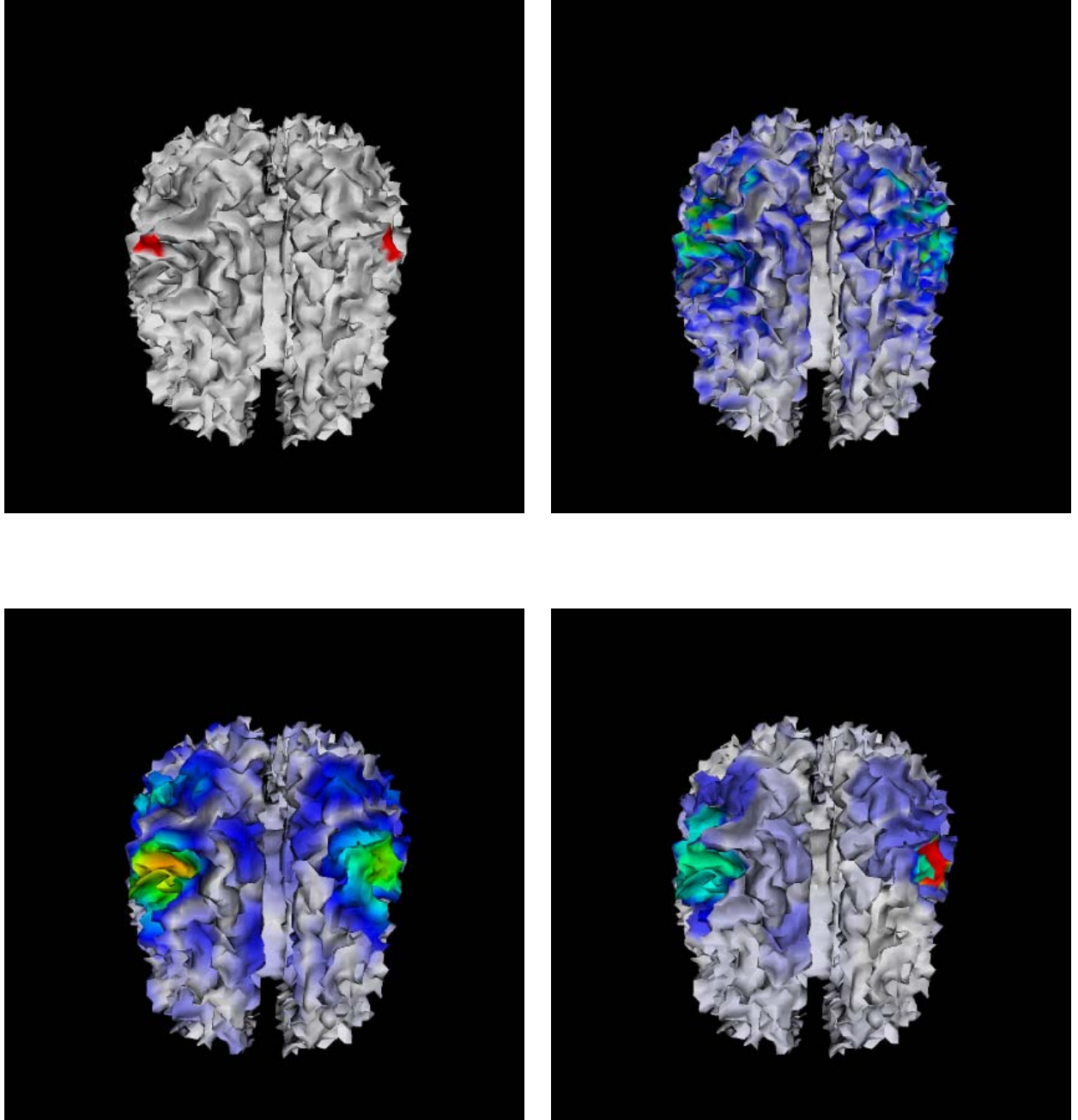


FIG. D.53 – Reconstruction de 3 patches d'activité. Niveau de bruit sur les capteurs 0%. Vue avant de dessus. De gauche à droite et de bas en haut : source originale (max=1), C-MN (max=0.10), C-HEAT (max=0.12) et C-TV (max=0.18).

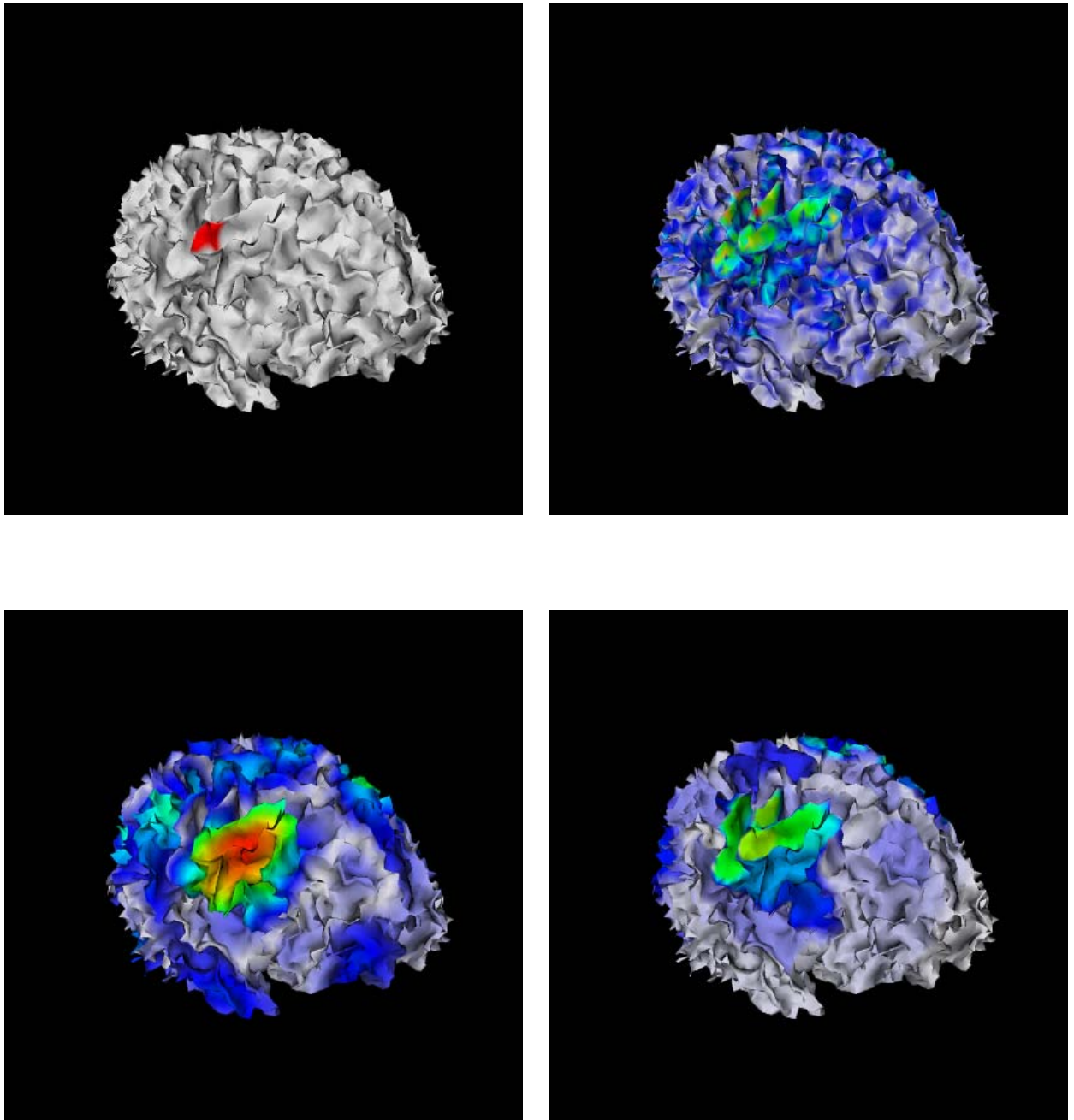


FIG. D.54 – Reconstruction de 3 patches d'activité. Niveau de bruit sur les capteurs 5%. Vue avant gauche. De gauche à droite et de bas en haut : source originale ( $\max=1$ ), MN ( $\max=0.05$ ), HEAT ( $\max=0.11$ ) et TV ( $\max=0.08$ ).

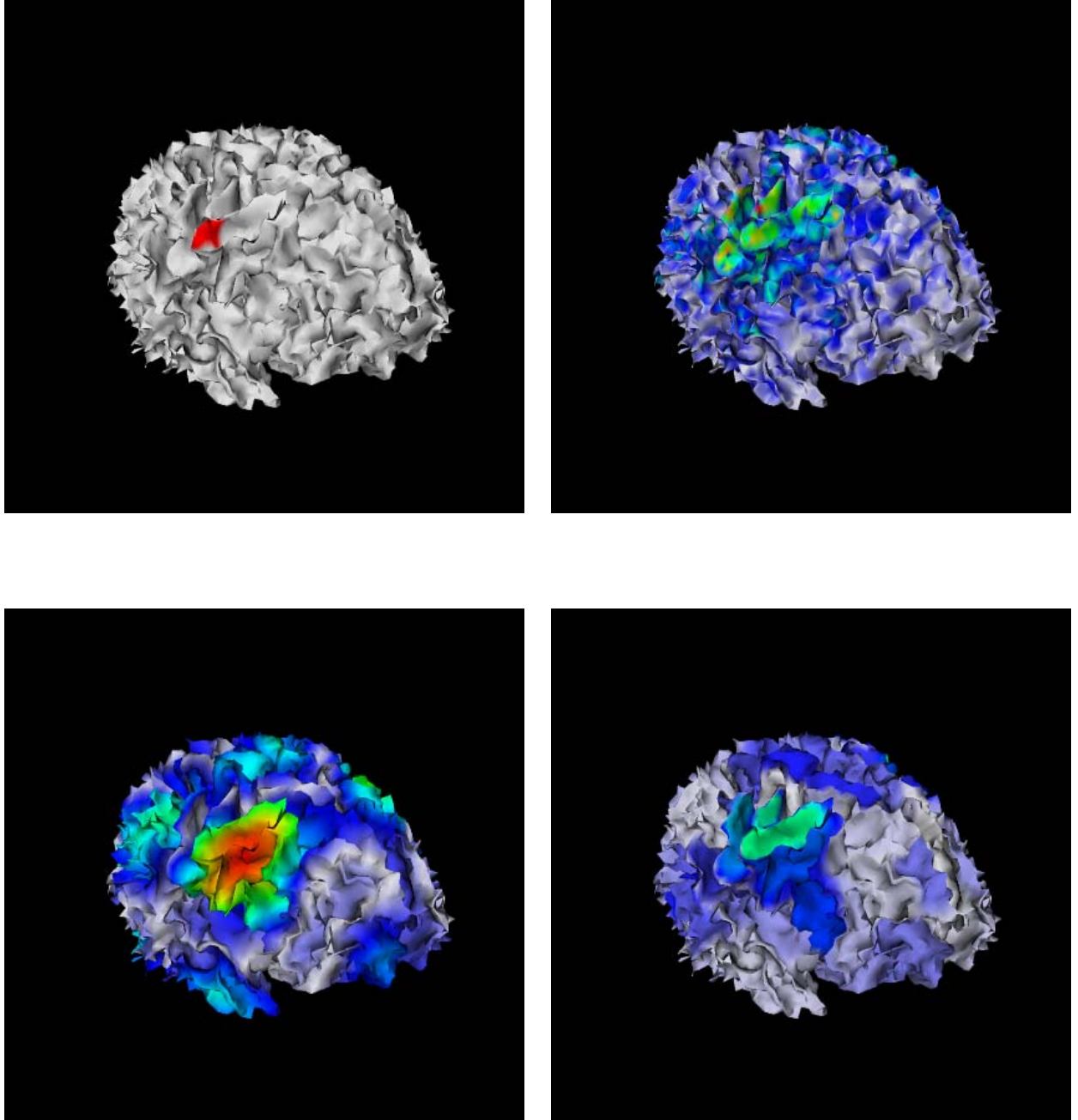


FIG. D.55 – Reconstruction de 3 patches d'activité. Niveau de bruit sur les capteurs 10%. Vue avant gauche. De gauche à droite et de bas en haut : source originale ( $\max=1$ ), MN ( $\max=0.05$ ), HEAT ( $\max=0.09$ ) et TV ( $\max=0.09$ ).

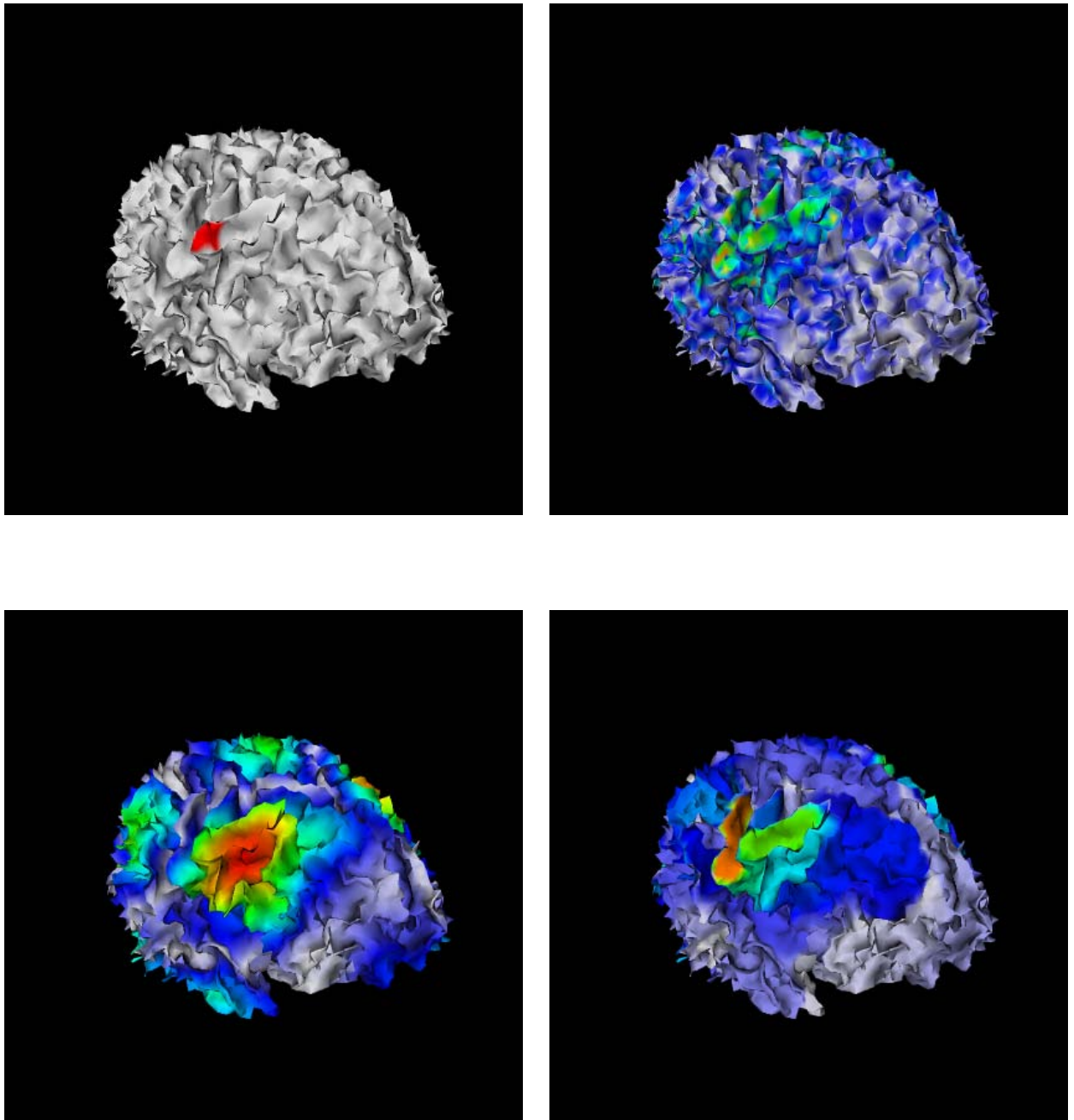


FIG. D.56 – Reconstruction de 3 patches d'activité. Niveau de bruit sur les capteurs 20%. Vue avant gauche. De gauche à droite et de bas en haut : source originale (max=1), MN (max=0.05), HEAT (max=0.06) et TV (max=0.06).

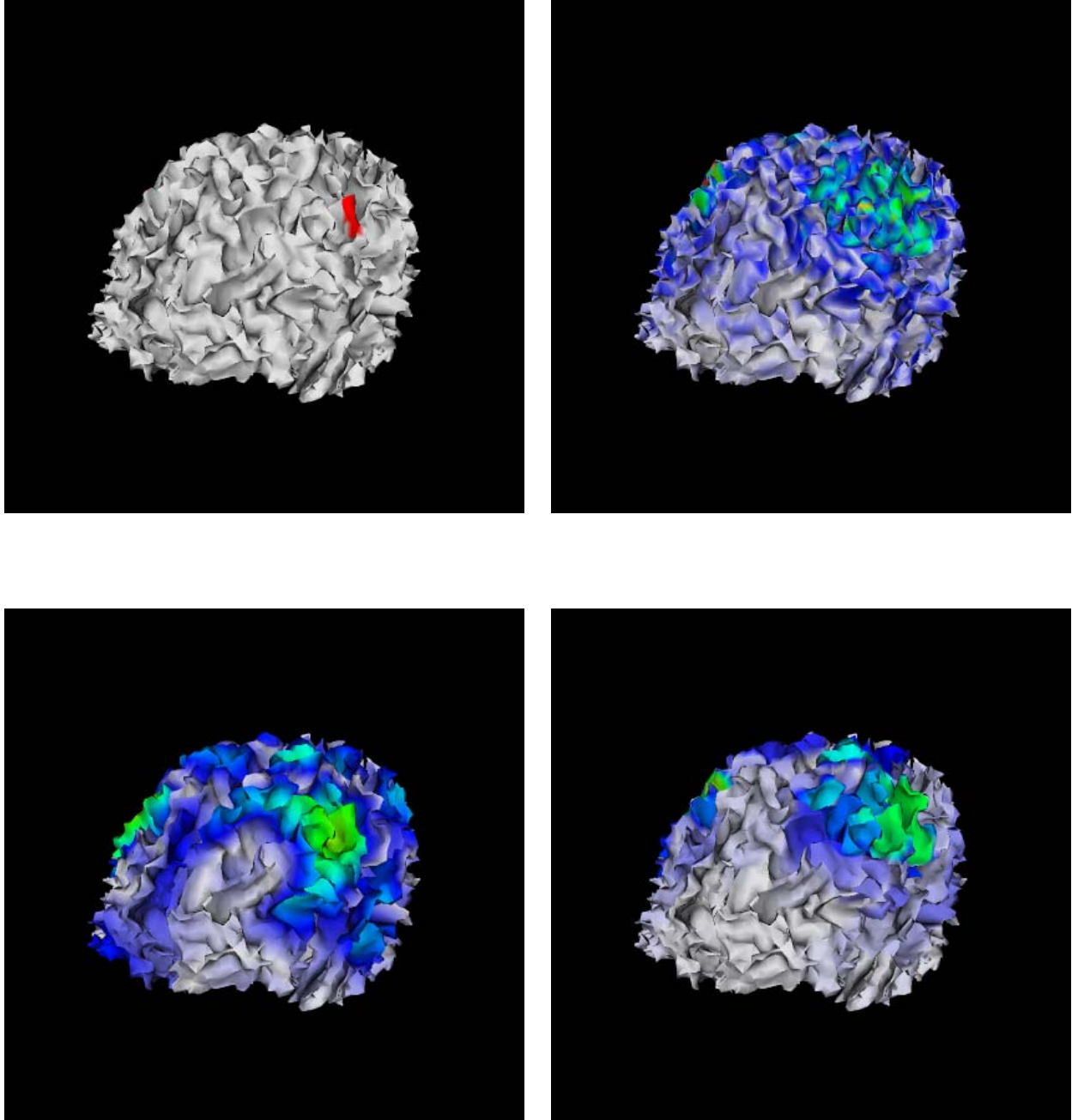


FIG. D.57 – Reconstruction de 3 patches d'activité. Niveau de bruit sur les capteurs 5%. Vue avant droite. De gauche à droite et de bas en haut : source originale ( $\max=1$ ), MN ( $\max=0.05$ ), HEAT ( $\max=0.11$ ) et TV ( $\max=0.08$ ).



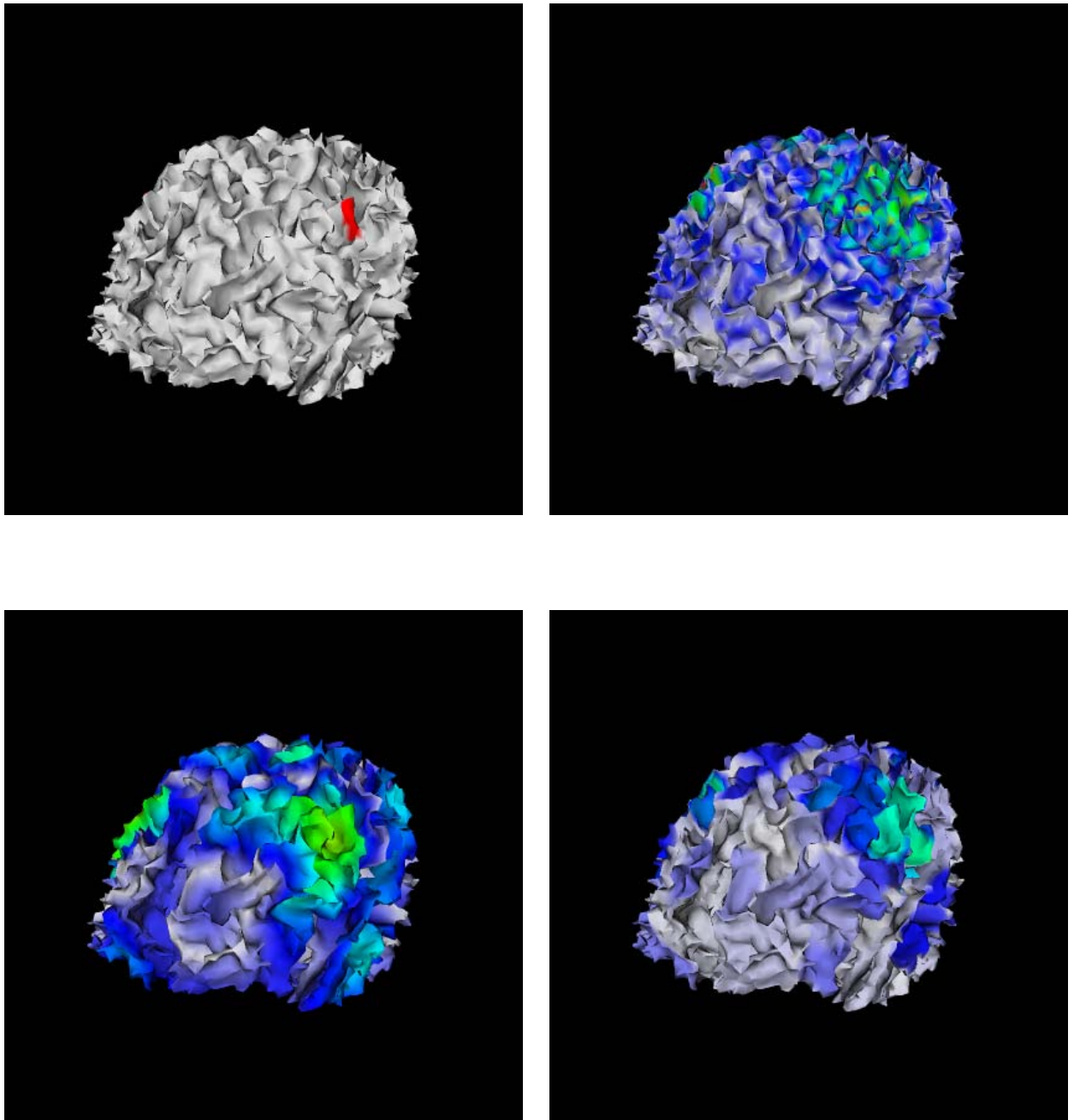


FIG. D.58 – Reconstruction de 3 patches d'activité. Niveau de bruit sur les capteurs 10%. Vue avant droite. De gauche à droite et de bas en haut : source originale ( $\max=1$ ), MN ( $\max=0.05$ ), HEAT ( $\max=0.09$ ) et TV ( $\max=0.09$ ).

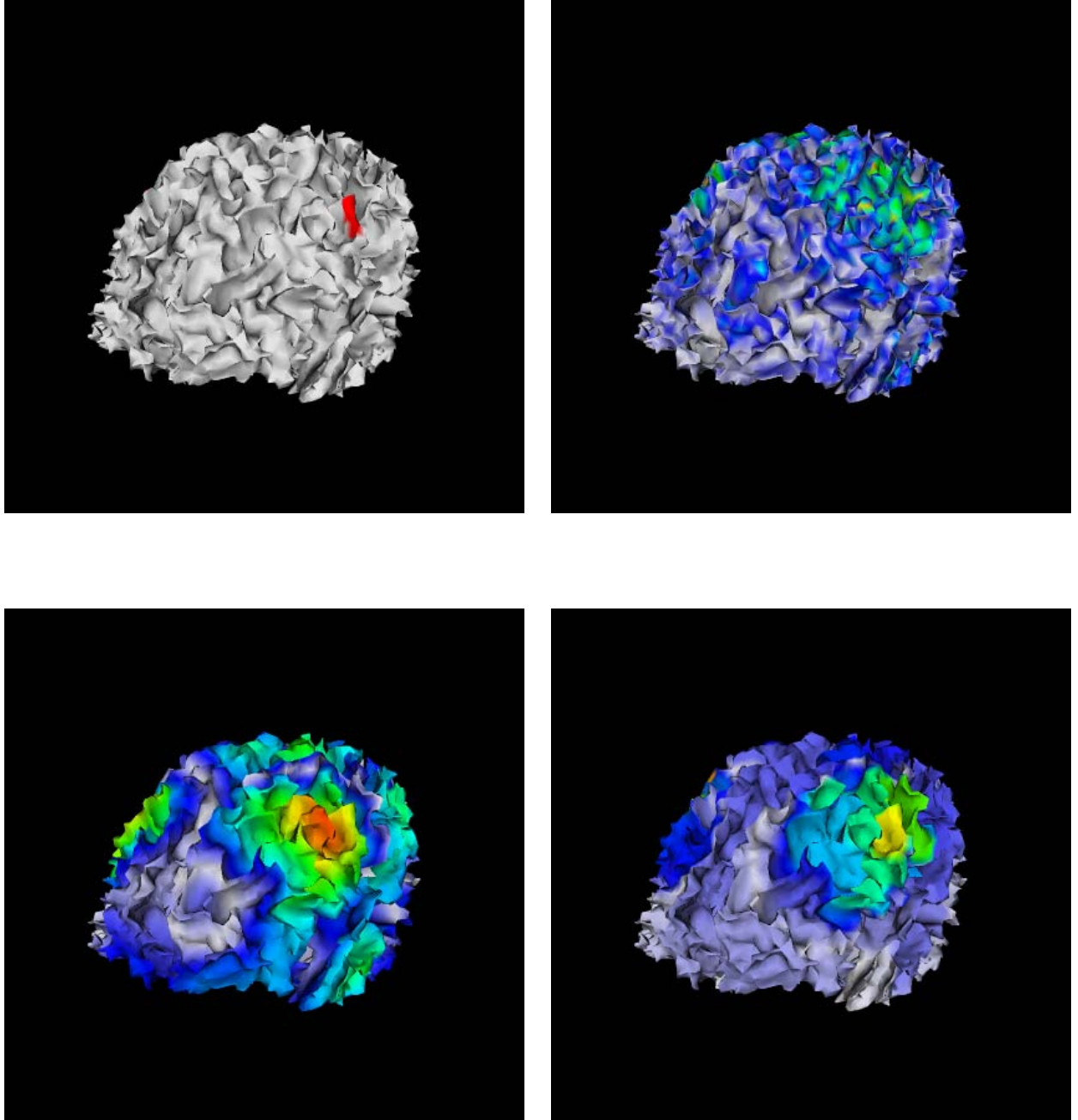


FIG. D.59 – Reconstruction de 3 patches d'activité. Niveau de bruit sur les capteurs 20%. Vue avant droite. De gauche à droite et de bas en haut : source originale ( $\max=1$ ), MN ( $\max=0.05$ ), HEAT ( $\max=0.06$ ) et TV ( $\max=0.06$ ).



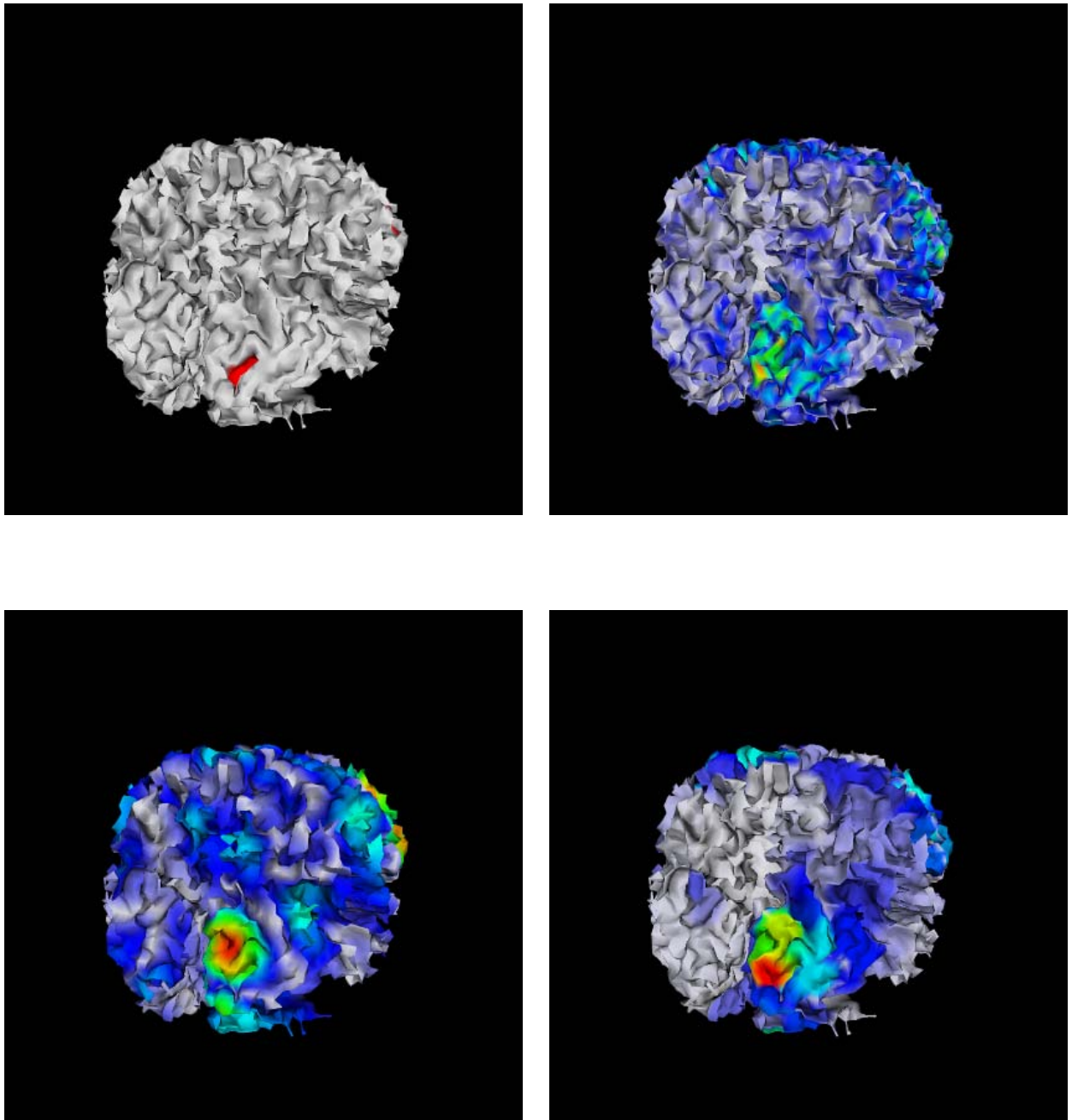


FIG. D.60 – Reconstruction de 3 patches d'activité. Niveau de bruit sur les capteurs 5%. Vue arrière droite. De gauche à droite et de bas en haut : source originale ( $\max=1$ ), MN ( $\max=0.05$ ), HEAT ( $\max=0.11$ ) et TV ( $\max=0.08$ ).

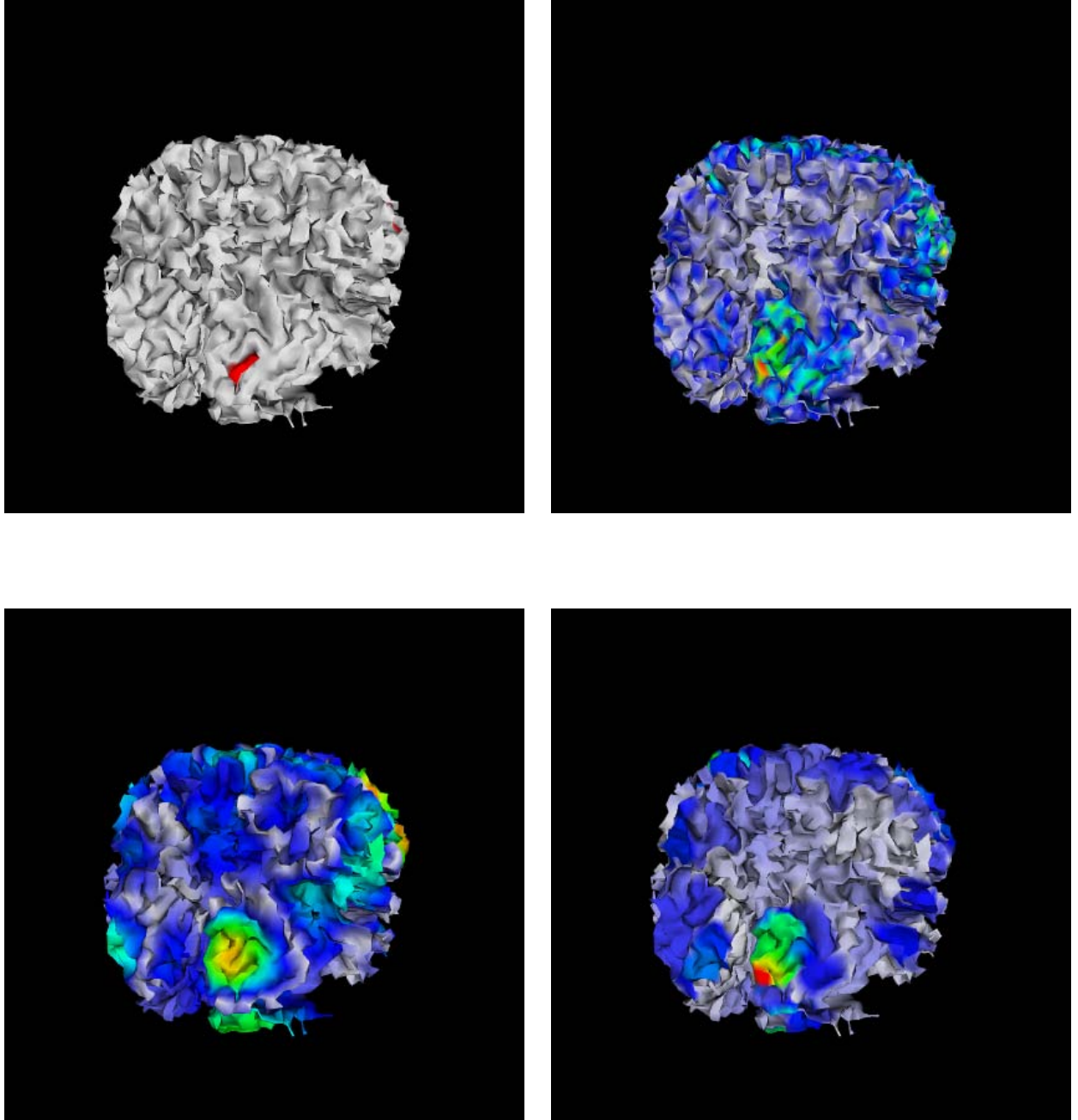


FIG. D.61 – Reconstruction de 3 patches d'activité. Niveau de bruit sur les capteurs 10%. Vue arrière droite. De gauche à droite et de bas en haut : source originale ( $\max=1$ ), MN ( $\max=0.05$ ), HEAT ( $\max=0.09$ ) et TV ( $\max=0.09$ ).

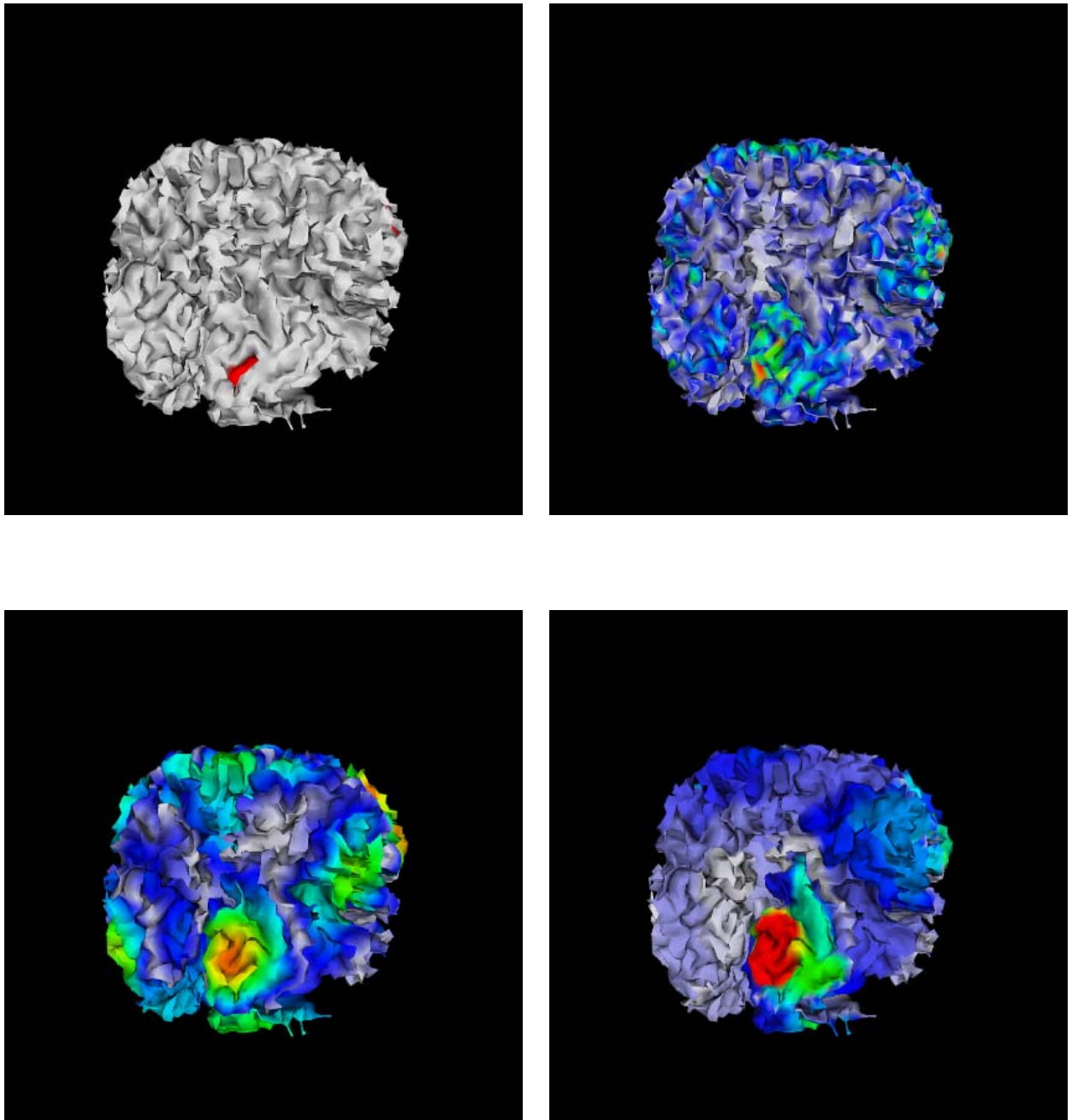


FIG. D.62 – Reconstruction de 3 patches d'activité. Niveau de bruit sur les capteurs 20%. Vue arrière droite. De gauche à droite et de bas en haut : source originale ( $\max=1$ ), MN ( $\max=0.05$ ), HEAT ( $\max=0.06$ ) et TV ( $\max=0.06$ ).

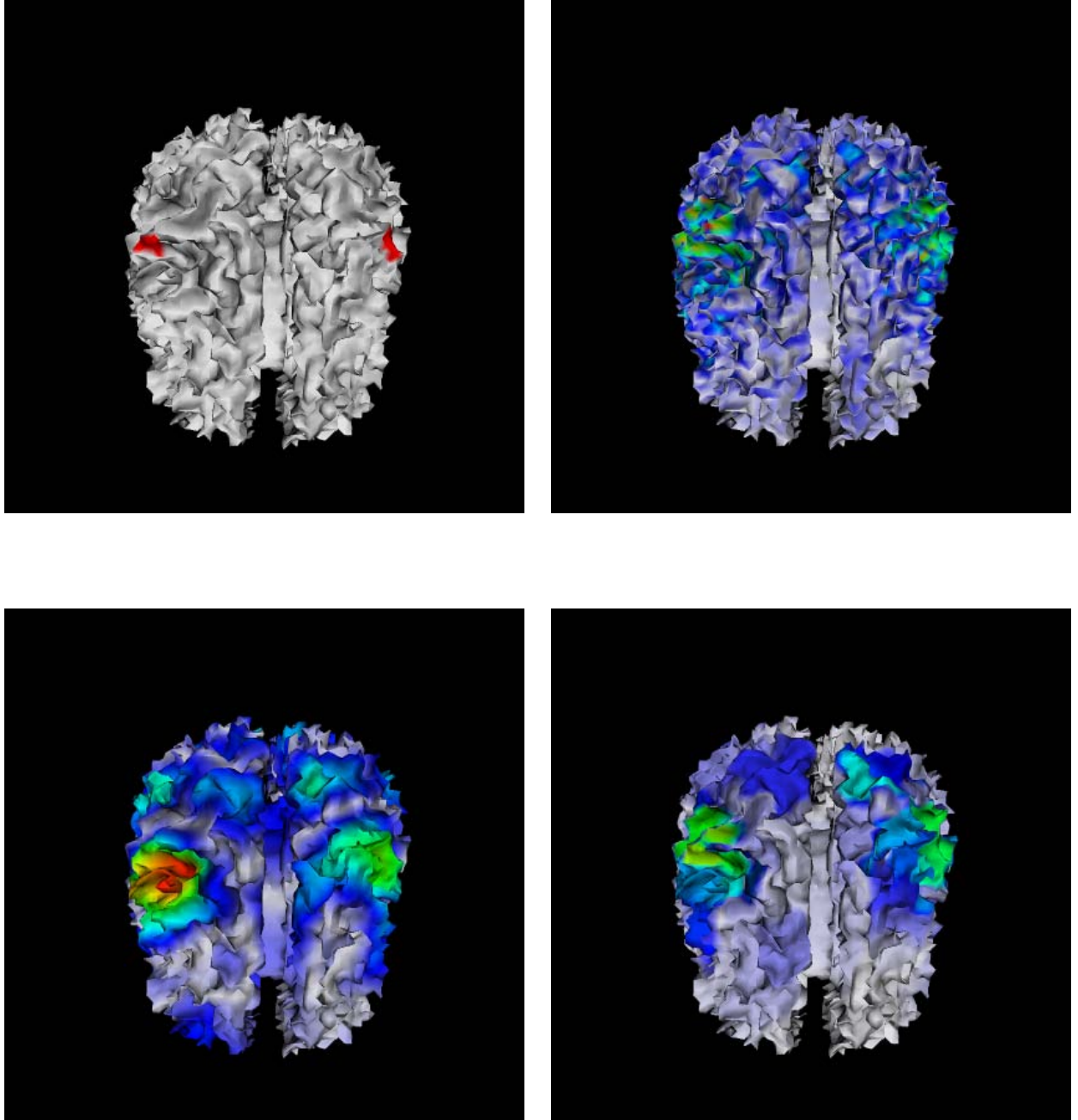


FIG. D.63 – Reconstruction de 3 patches d'activité. Niveau de bruit sur les capteurs 5%. Vue avant de dessus. De gauche à droite et de bas en haut : source originale ( $\max=1$ ), MN ( $\max=0.05$ ), HEAT ( $\max=0.11$ ) et TV ( $\max=0.08$ ).

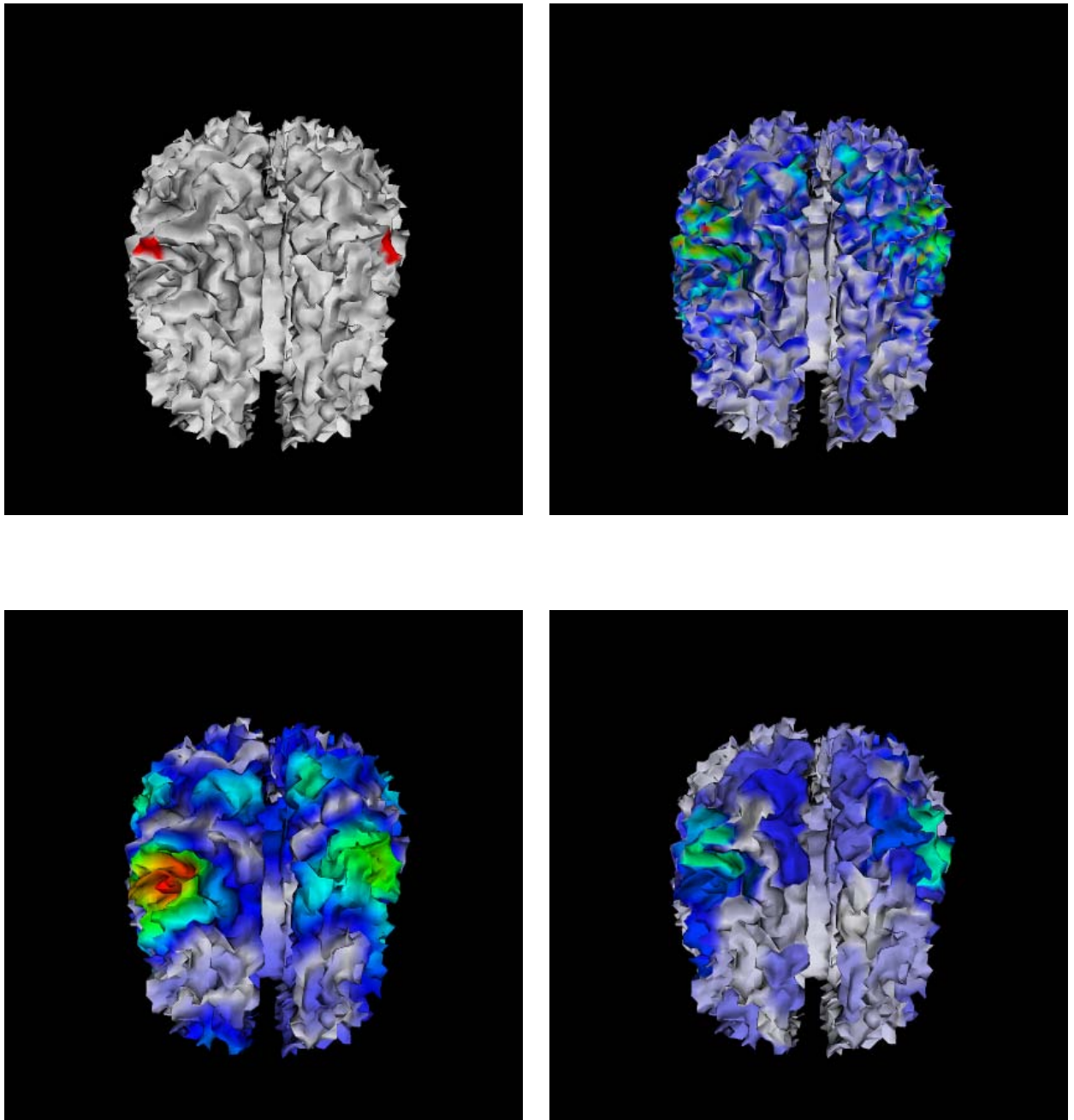


FIG. D.64 – Reconstruction de 3 patches d'activité. Niveau de bruit sur les capteurs 10%. Vue avant de dessus. De gauche à droite et de bas en haut : source originale ( $\max=1$ ), MN ( $\max=0.05$ ), HEAT ( $\max=0.09$ ) et TV ( $\max=0.09$ ).



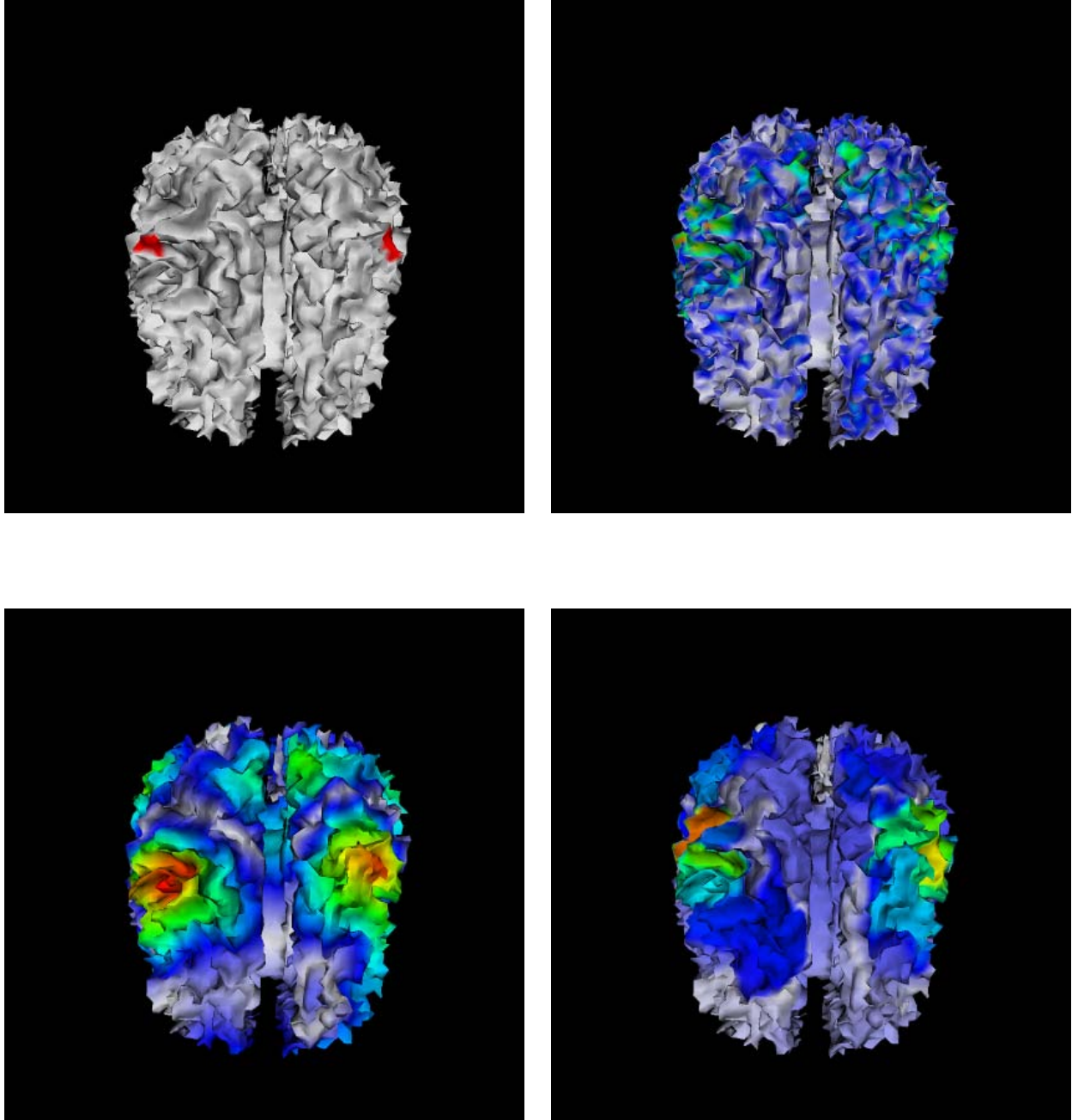


FIG. D.65 – Reconstruction de 3 patches d'activité. Niveau de bruit sur les capteurs 20%. Vue avant de dessus. De gauche à droite et de bas en haut : source originale ( $\max=1$ ), MN ( $\max=0.05$ ), HEAT ( $\max=0.06$ ) et TV ( $\max=0.06$ ).

---

# Bibliographie

- [1] ADDE, G., CLERC, M., FAUGERAS, O., KERIVEN, R., KYBIC, J., AND PAPA-DOPOULO, T. Symmetric BEM formulation for the M/EEG forward problem. In *Information Processing in Medical Imaging* (July 2003), C. Taylor and J. A. Noble, Eds., vol. 2732 of *LNCIS*, Springer, pp. 524–535.
- [2] ADDE, G., CLERC, M., AND KERIVEN, R. Imaging methods for meg/eeg inverse problem. In *Proc. Joint Meeting of 5th International Conference on Bioelectromagnetism and 5th International Symposium on Noninvasive Functional Source Imaging* (Minneapolis, May 2005).
- [3] ADDE, G., CLERC, M., KERIVEN, R., AND KYBIC, J. Anatomy-based regularization for the inverse meeg problem. In *4th International Symposium on Noninvasive Functional Source Imaging within the human brain and heart* (Chieti, Sept. 2003).
- [4] <http://developer.amd.com/acml.aspx>.
- [5] ARY, J., KLEIN, S., AND FENDER, D. Location of sources of evoked scalp potentials : Corrections for skull and scalp thickness. *IEEE Trans. Biomed. Eng.* 28 (June 1981), 447–452.
- [6] <http://www.ant-software.nl>.
- [7] AUBERT, G., AND KORNPORST, P. *Mathematical Problems in Image Processing : Partial Differential Equations and the Calculus of Variations*, vol. 147 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, Jan. 2002.
- [8] BAILLET, S., AND GARNERO, L. A bayesian approach to introducing anatomo-functional priors in the EEG/MEG inverse problem. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering* 44, 5 (May 1997), 374–385.
- [9] BAILLET, S., GARNERO, L., MARIN, G., AND HUGONIN, J. Combined MEG and EEG source imaging by minimization of Mutual Information. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering* 46 (1999), 522–534.
- [10] BAILLET, S., MOSHER, J., AND LEAHY, R. Hybrid meg/eeg source characterization by cortical remapping and imaging of parametric source models. In *Proceedings of BIOMAG 2000* (Aug. 2000).
- [11] BAILLET, S., RIERA, J., MANGIN, J., GARNERO, L., MARIN, G., AND AUBERT, G. Evaluation of Inverse Methods and Head Models for EEG Source Localization using a Human Skull Phantom. *Phys Med Biol* 46, 1 (jan 2001), 77–96.
- [12] BARATCHART, L., LEBLOND, J., MANDREA, F., AND SAFF, E. How can the memorphic approximation help to solve some 2d inverse problems for the laplacian ? *Inverse Problems* 15 (1999), 79–90.
- [13] BAYSAL, U., AND HAUEISEN, J. Use of a priori information in estimating tissue resistivities - application to human data in vivo. *Physiol. Meas.* 25 (2004), 737–748.



- [14] BECT, J., BLANC-FÉRAUD, L., AUBERT, G., AND CHAMBOLLE, A. . A  $l^1$ -unified variational framework for image restoration. In *Proceedings of the 8th European Conference on Computer Vision* (Prague, Czech Republic, 2004), T. Pajdla and J. Matas, Eds., Springer-Verlag, p. 1.
- [15] [http://www.besa.de/index\\_home.htm](http://www.besa.de/index_home.htm).
- [16] BONNANS, J., GILBERT, J., LEMARECHAL, C., AND SAGASTIZABAL, C. *Numerical Optimization : Theoretical and Practical Aspects*. Springer-Verlag, 2002.
- [17] BONNET, M. *Equations intégrales et éléments de frontière*. CNRS Editions, Eyrolles, 1995.
- [18] CHAFIK, M., EL BADIA, A., AND HA-DUONG, T. On some inverse EEG problems. In *Inverse Problem in Engineering Mechanics II* (2000), M. Tanaka and G. S. Dulikravich, Eds., Elsevier Science Ltd, pp. 537–544.
- [19] CHAMBOLLE, A. An algorithm for total variation minimization and applications". *J. Math. Imaging Vis.* 20, 1-2 (2004), 89–97.
- [20] CHARBONNIER, P. *Reconstruction d'image : régularisation avec prise en compte des discontinuités*. PhD thesis, Université de Nice-Sophia Antipolis, 1994.
- [21] CHARBONNIER, P., AUBERT, G., BLANC-FÉRAUD, M., AND BARLAUD, M. Two deterministic half-quadratic regularization algorithms for computed imaging. In *Proceedings of the International Conference on Image Processing* (1994), vol. II, pp. 168–172.
- [22] CHARBONNIER, P., BLANC-FÉRAUD, L., AUBERT, G., AND BARLAUD, M. Deterministic edge-preserving regularization in computed imaging. *IEEE Transactions on Image Processing* 6, 2 (1997), 298–311.
- [23] CLERC, M., ADDE, G., KYBIC, J., PAPADOPOULOU, T., AND BADIER, J.-M. In vivo conductivity estimation with symmetric boundary elements. In *Proc. Joint Meeting of 5th International Conference on Bioelectromagnetism and 5th International Symposium on Noninvasive Functional Source Imaging* (Minneapolis, May 2005).
- [24] CLERC, M., BADIER, J., ADDE, G., KYBIC, J., AND PAPADOPOULOU, T. Boundary element formulation for electrical impedance tomography. *ESAIM : Mathematics and applications to biology and medicine* 34, 14 (2005), 63–71.
- [25] CLERC, M., KERIVEN, R., FAUGERAS, O., KYBIC, J., AND PAPADOPOULOU, T. The fast multipole method for the direct E/MEG problem. In *Proceedings of ISBI* (Washington, D.C., July 2002), IEEE, NIH.
- [26] <http://www.neuroscan.com/product.sstg?id=62>.
- [27] DALE, A., LIU, A., FISCHL, B., BUCKNER, R., BELLIVEAU, J., LEWINE, J., AND HALGREN, E. Dynamic statistical parametric mapping combining fmri and meg for high-resolution imaging of cortical activity. *Neuron* 26 (2000), 55–67.
- [28] DALE, A. M., AND SERENO, M. I. Improved localization of cortical activity by combining eeg and meg with mri cortical surface reconstruction : A linear approach. *Journal of Cognitive Neuroscience* 5, 2 (1993), 162–176.
- [29] DANIELSSON, P.-E. Euclidean Distance Mapping. *Computer Graphics and Image Processing* 14, 3 (Nov. 1980), 227– 248.
- [30] DASSIOS, G., AND KARIOTOU, F. Magnetoencephalography in ellipsoidal geometry. *Journal of Mathematical Physics* 44 (2003), 220–241.

- [31] DE MUNCK, J. C. The potential distribution in a layered anisotropic spheroidal volume conductor. *J. Appl. Phys* 2, 64 (July 1988), 464–470.
- [32] DE MUNCK, J. C. A linear discretization of the volume conductor boundary integral equation using analytically integrated elements. *IEEE Trans. Biomed. Eng.* 39, 9 (Sept. 1992), 986–990.
- [33] DELFOUR, M., AND ZOLÉSIO, J.-P. *Shapes and geometries*. Advances in Design and Control. Siam, 2001.
- [34] DOCARMO, M. P. *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Prentice-Hall, 1976.
- [35] ESHEL, Y., WITMAN, S., ROSENFELD, M., AND ABBOD, S. Correlation between skull thickness asymmetry and scalp potential estimated by a numerical model of the head. *IEEE Trans. Biomed. Eng.* 42 (Mar. 1995), 242–249.
- [36] FAES, T., VAN DER MEIJ, H., DE MUNCK, J., AND HEETHAAR, R. The resistivity of human tissue (100 hz-10 mhz) : a meta-analysis of review studies. *Physiol. Meas.* 20 (1999), R1–R10.
- [37] FEREE, T., ERIKSEN, K., AND TUCKER, D. Regional head tissue conductivity estimation for improved eeg analysis. *IEEE Trans. Biomed. Eng.* 47 (Dec. 2000), 1584–1592.
- [38] FERGUSON, A. S., AND STROINK, G. Factors affecting the accuracy of the boundary element method in the forward problem — I : Calculating surface potentials. *IEEE Trans. Biomed. Eng.* 44, 11 (Nov. 1997), 1139–1155.
- [39] FERGUSON, A. S., ZHANG, X., AND STROINK, G. A complete linear discretization for calculating the magnetic field using the boundary element method. *IEEE Trans. Biomed. Eng.* 41, 5 (May 1994), 455–459.
- [40] FISCHER, G., TILG, B., MODRE, R., HANSER, F., MESSNARZ, B., AND WACH, P. On modeling the Wilson terminal in the Boundary and Finite Element Method. *IEEE Trans. Biomed. Eng.* 49, 3 (Mar. 2002), 217–224.
- [41] FLETCHER, R. *Practical Methods of Optimization, 2nd edition*. Wiley Interscience, 1991.
- [42] GEDDES, L., AND BAKER, L. The specific resistance of biological material – a compendium of data for the biomedical engineer and physiologist. *Med. Biol. Eng.* 5 (1967), 271–293.
- [43] GENCER, N., AND TEK, M. Electrical conductivity imaging via contactless measurements. *IEEE Transactions on Medical Imaging* 18, 7 (1999), 617–627.
- [44] GESELOWITZ, D. B. On bioelectric potentials in an homogeneous volume conductor. *Biophysics Journal* 7 (1967), 1–11.
- [45] GOLUB, G., AND VAN LOAN, C. *Matrix Computations*, second ed. The John Hopkins University Press, Baltimore, Maryland, 1989.
- [46] GOLUB, G. H., AND VAN LOAN, C. F. *Matrix computations*. The John Hopkins University Press, Baltimore, Maryland, 1983.
- [47] GONÇALVES, S., DE MUNCK, J., VERBUNT, J., HEETHAAR, R., AND LOPES DA SILVA, F. In vivo measurement of the brain and skull resistivities using an EIT-based method and the combined analysis of SEF/SEP data. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering* 50, 9 (Sept. 2003), 1124–8.

- [48] GONÇALVES, S. I., DE MUNCK, J. C., VERBUNT, J. P., BIJMA, F., HEETHAAR, R. M., AND DA SILVA, F. L. In vivo measurement of the brain and skull resistivities using an EIT-based method and realistic models for the head. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering* 50, 6 (2003).
- [49] GRAY, L. J., AND PAULINO, G. H. Symmetric Galerkin boundary integral formulation for interface and multi-zone problems. *Internat. J. Numer. Methods Eng.* 40, 16 (1997), 3085–3103.
- [50] GREENBLAT, R. Probabilistic reconstruction of multiple sources in the bioelectromagnetic inverse problem. *Inverse Problems* 9 (1993), 271–284.
- [51] GUPTA, A. Recent advances in direct methods for solving unsymmetric sparse systems of linear equations. *ACM Trans. Math. Softw.* 28, 3 (2002), 301–324.
- [52] GUTIERREZ, D., NEHORAI, A., AND PREISSE, H. Ellipsoidal head model for fetal magnetoencephalography : forward and inverse solutions. *Phys. Med. Biol.* 50 (2005), 2141–2157.
- [53] GUTTIÉRREZ, D., NEHORAI, A., AND MURAVCHIK, C. H. Estimating brain conductivities and dipole source signals with EEG arrays. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering* 51, 12 (Dec. 2004), 2113–2122.
- [54] HÄMÄLÄINEN, M., HARI, R., IIMONEMI, R. J., KNUUTILA, J., AND LOUNASMAA, O. V. Magnetoencephalography— theory, instrumentation, and applications to noninvasive studies of the working human brain. *Reviews of Modern Physics* 65, 2 (Apr. 1993), 413–497.
- [55] HÄMÄLÄINEN, M. S., AND SARVAS, J. Realistic conductivity geometry model of the human head for interpretation of neuromagnetic data. *IEEE Trans. Biomed. Eng.* 36, 2 (Feb. 1989), 165–171.
- [56] HÉDOU, V. *Méthodes Numériques pour la Modélisation Electro-anatomique du Cerveau*. PhD thesis, Université de Rennes I, 1997.
- [57] HUISKAMP, G. Difference formulas for the surface laplacian on a triangulated surface. *J. Comput. Phys.* 95, 2 (1991), 477–496.
- [58] HUISKAMP, G., VROEIJENSTIJN, M., VAN DIJK, R., G., W., AND A., H. The need to correct realistic geometry in the inverse eeg problem. *IEEE Trans. Biomed. Eng.* 46 (Nov. 1999), 1281–1287.
- [59] HUIZENGA, H., VAN ZUIJEN, T., HELSENFELD, D., AND MOLENAAR, P. Simultaneous meg and eeg source analysis. *Physiol. Med. Biol.* 46, 7 (2001), 1737–1751.
- [60] HYVÖNEN, N. Complete electrode model of electrical impedance tomography : Approximation properties and characterization of inclusions. *SIAM J. Appl. Math.* 64, 3 (2004), 902–931.
- [61] <http://www.intel.com/cd/software/products/asm-na/eng/perflib/mkl/index.htm>.
- [62] IRIMAJIRI, R., GOLOB, E., AND STARR, A. Auditory brain-stem, middle- and long-latency evoked potentials in mild cognitive impairment. *Clinical Neurophysiology*, 116 (aug 2005), 1918–1929.
- [63] JEFFS, B., LEAHY, R., AND SINGH, M. An evaluation of methods for neuromagnetic image reconstruction. *IEEE Trans. Biomed. Eng.* 34 (1987), 713–723.
- [64] JERBI, K., BAILLET, S., MOSHER, J., NOLTE, G., GARNERO, L., AND LEAHY, R. Localization of realistic cortical activity in meg using current multipoles. *Neuroimage* 22(2) (jun 2004), 779–793.

- [65] JERBI, K., MOSHER, C., BAILLET, S., AND LEAHY, R. On MEG Forward Modeling using Multipolar Expansions. *Physics in Medicine and Biology* 47 (Feb. 2002), 523–555.
- [66] KATILA, T., AND KARP, P. *Biomagnetism : An Interdisciplinary Approach*. New York : Plenum, 1983, ch. Magnetocardiography : morphology and multipole presentations, pp. 237–263.
- [67] KOZLOV, V., MAZ'YA, V., AND FOMIN, A. An "alternating" iteration procedure for solving the cauchy problem for the laplace equation and the anisotropic elasticity system. *Comput. Math. Phys.* 31 (1991), 45–52.
- [68] KRIM, H., AND VIBERG, M. Two decades of array signal processing research. *IEEE Signal Processing Magazine* 13 (1996), 67–94.
- [69] KYBIC, J., CLERC, M., ABOUD, T., FAUGERAS, O., KERIVEN, R., AND PAPADOPOULOS, T. Fast multipole acceleration of the meg/eeg boundary element method. *Phys. Med. Biol.* 50 (Sept. 2005), 4695–4710.
- [70] LAYTON, J. B., GANGULY, S., BALAKRISHNA, C., AND KANE, J. H. A symmetric Galerkin multi-zone boundary element formulation. *Internat. J. Numer. Methods Eng.* 40, 16 (1997), 2913–2931.
- [71] LE BIHAN, D. Methods and applications of diffusion mri. In *Magnetic Resonance Imaging and Spectroscopy in Medicine and Biology*, I. Young, Ed. John Wiley and Sons, 2000.
- [72] LEAHY, R., MOSHER, J., SPENCER, M., HUANG, M., AND LEWINE, J. A study of dipole localization accuracy for MEG and EEG using a human skull phantom. Los Alamos Technical Report LA-UR-98-1442, Los Alamos National Laboratory, Mar. 1998. Revision of LA-UR-97-4804.
- [73] LEMIEUX, L., MCBRIDE, A., AND HAND, J. Calculation of electric potentials on the surface of a realistic head model by finite differences. *Phys. Med. Biol.*, 41 (1996), 1079–1091.
- [74] LI, S. *Markov Random Field Modeling in Computer Vision*. Springer-Verlag, 1995.
- [75] LOPEZ-PEREZ, L., DERICHE, R., AND SOCHEN, N. The beltrami flow over triangulated manifolds. In *Computer Vision and Mathematical Methods in Medical and Biomedical Image Analysis : ECCV 2004 Workshops CVAMIA and MMBIA, Prague, Czech Republic, May 15, 2004, Revised Selected Papers* (Oct. 2004), M. Sonka, I. A. Kakadiaris, and J. Kybic, Eds., vol. 3117 of *Lecture Notes in Computer Science*, Springer-Verlag Heidelberg, pp. 135–144.
- [76] LYNESS, J. N., AND JESPERSEN, D. Moderate degree symmetric quadrature rules for the triangle. *J. Inst. Maths Applies* 15 (1975), 19–32.
- [77] MARIN, G., GUERIN, C., BAILLET, S., GARNERO, L., AND MEUNIER, G. Influence of skull anisotropy for the forward and inverse problems in EEG : simulation studies using FEM on realistic head models. *Human Brain Mapping* 6 (1998), 250–269.
- [78] MARINO, F., HALGREN, E., BADIER, J.-M., GEE, M., AND NENOV, V. Finite difference model of electric field propagation in the human head : implementation and validation. In *19th IEEE annual Northeast Bioengineering Conference* (1993).
- [79] MATSUURA, K., AND OKABE, Y. Selective minimum norm solution of the biomagnetic inverse problem. *IEEE Trans. Biomed. Eng.* 42 (1995), 608–615.

- [80] MEIJS, J. W. H., AND PETERS, M. The eeg and meg using a model of eccentric spheres to describe the head. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering* 34 (Dec. 1987), 913–920.
- [81] MEIJS, J. W. H., WEIER, O. W., PETERS, M. J., AND VAN OOSTEROM, A. On the numerical accuracy of the boundary element method. *IEEE Trans. Biomed. Eng.* 36 (1989), 1038–1049.
- [82] MEYER, M., DESBRUN, M., AND SCHRÖDER. *Visualisierung und Mathematics III*. Heidelberg : Springer-Verlag, 2003, ch. Discrete differential-geometry operators for triangulated 2-manifolds., pp. 35–57.
- [83] MOSHER, J., LEAHY, R. M., SHATTUCK, D. W., AND BAILLET, S. Meg source imaging using multipolar expansions. In *IPMI '99 : Proceedings of the 16th International Conference on Information Processing in Medical Imaging* (London, UK, 1999), Springer-Verlag, pp. 15–18.
- [84] MOSHER, J., SPENCER, M., LEAHY, R., AND LEWIS, P. Error bounds for eeg and meg dipole source localization. *Electroenceph. Clin. Neurophysiol.* 86 (1993), 303–321.
- [85] MOSHER, J. C., AND LEAHY, R. B. Recursive music : a framework for eeg and meg source localization. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering* 45 (1998), 1342–1354.
- [86] MOSHER, J. C., LEAHY, R. B., AND LEWIS, P. S. EEG and MEG : Forward solutions for inverse methods. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering* 46, 3 (Mar. 1999), 245–259.
- [87] MOSHER, J. C., LEWIS, P. S., AND LEAHY, R. M. Multiple dipole modeling and localization from spatio-temporal MEG data. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering* 39, 6 (1992), 541–553.
- [88] NÉDELEC, J.-C. *Acoustic and Electromagnetic Equations*. Springer Verlag, 2001.
- [89] [http://www.netlib.org/scalapack/scalapack\\_home.html](http://www.netlib.org/scalapack/scalapack_home.html).
- [90] NUNEZ, P. Localization of brain activity with electroencephalography. In *Advances in Neurology* (1990), vol. 54.
- [91] OKADA, Y. *Biomagnetism : An Interdisciplinary Approach*. New York : Plenum, 1985, ch. Discrimination of localized and distributed current dipole sources and localized single and multiple sources, pp. 266–272.
- [92] OOSTENDORP, T., DELBEKE, J., AND STEGEMAN, D. The conductivity of the human skull : Results of *in vivo* and *in vitro* measurements. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering* 47, 11 (Dec. 2000), 1487–1492.
- [93] <http://www.openmesh.org>.
- [94] PASCUAL-MARQUI, R., MICHEL, C., AND LEHMAN, D. Low resolution electromagnetic tomography : a new method for localizing electrical activity in the brain. *Int. Jour. of Psychophysiol.* 18 (1994), 49–65.
- [95] PERONA, P., AND MALIK, J. Scale-space and edge detection using anisotropic diffusion. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence* 12, 7 (July 1990), 629–639.
- [96] PHILLIPS, J., LEAHY, R., MOSHER, J., AND TIMSARI, B. Imaging neural activity using MEG and EEG. *IEEE Engineering in Medicine and Biology Magazine* 16, 3 (1997), 34–42.

- [97] POLAK, E. *Optimization : Algorithms and Consistent Approximations*, vol. 124 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, 1997.
- [98] PONS, J.-P., SÉGONNE, F., AND FAUGERAS, O. Extraction of head surface meshes from mri under topological constraints mri under topological constraints. In *unpublished* (2003).
- [99] RAHOLA, J., AND TISSARI, S. Iterative solution of dense linear systems arising from the electrostatic integral equation. *Phys. Med. Biol.*, 47 (2002), 961–975.
- [100] RUDIN, L., OSHER, S., AND FATEMI, E. Nonlinear total variation based noise removal algorithms. *Physica D* 60 (1992), 259–268.
- [101] RUSH, S., AND DRISCOLL, D. Current distribution in the brain from surface electrodes. *Anesthesia and Analgesia* 47 (1968), 717–723.
- [102] SARVAS, J. Basic mathematical and electromagnetic concepts of the biomagnetic inverse problem. *Phys. Med. Biol.* 32, 1 (1987), 11–22.
- [103] SÉGONNE, F., PONS, J.-P., GRIMSON, E., AND FISCHL, B. A novel level set framework for the segmentation of medical images under topology control. In *Workshop on Computer Vision for Biomedical Image Applications : Current Techniques and Future Trends* (2005). to appear.
- [104] SEPULVEDA, N., C.F., W., AND R.G., H. Finite element analysis of current pathways with implanted electrodes. In *Journal of Biomedical Engineering* (1983), vol. 5, pp. 41–48.
- [105] SHATTUCK, D., AND LEAHY, R. Brainsuite : An automated cortical surface identification tool. *Medical Image Analysis* 6, 2 (June 2002), 129–142.
- [106] SOCHEN, N., DERICHE, R., AND LOPEZ-PEREZ, L. Variational beltrami flows over manifolds. In *International Conference on Image Processing* (2003).
- [107] SPENCER, M., LEAHY, R., MOSHER, J., AND LEWIS, P. Adaptive filters for monitoring localized brain activity from surface potential time series. In *Proceedings of 26th Annual Asilomar Conference on Signals, Systems, and Computers* (1992), pp. 151–161.
- [108] STOK, C. The influence of model parameters on eeg/meg single dipole source estimation. *IEEE Trans. Biomed. Eng.* 34 (Apr. 1987), 289–296.
- [109] TESCHE, C. Meg imaging of neural population dynamics in the human thalamus. *Electroencephalography and Clinical Neurophysiology* 47 (1996), 81–90.
- [110] TISSARI, S., AND RAHOLA, J. Error analysis of a new Galerkin method to solve the forward problem in MEG and EEG using the boundary element method. Tech. Rep. TR/PA/98/39, CERFACS, 1998. Toulouse, France.
- [111] TOLEDO, S. A survey of out-of-core algorithms in numerical linear algebra. In *External Memory Algorithms and Visualization*, J. Abello and J. S. Vitter, Eds. American Mathematical Society Press, Providence, RI, 1999, pp. 161–180.
- [112] TOWERS, C., MCCANN, H., WANG, M., BEATTY, P., POMFRETT, C., AND BECK, M. 3d simulation of eit for monitoring impedance variations within human head. *Physiol. Meas.* 21 (2000), 119–124.
- [113] TUCH, D., WEDEEN, V., DALE, A., GEORGE, J., AND BELLIVEAU, J. Conductivity tensor mapping of the human brain using diffusion tensor mri. In *Proceedings of the National Academy of Sciences* (2001), vol. 98, pp. 11697–11701.

- [114] <http://brainsuite.usc.edu/>.
- [115] VAN OOSTEROM, A., AND STRACKEE, J. The solid angle of a plane triangle. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering* 30 (1983), 125–126.
- [116] VAN VEEN, B., AND BUCKLEY, K. Beamforming : A versatile approach to spatial filtering. *IEEE ASSP magazine* 5, 2 (1988), 4–23.
- [117] VON ELLENRIEDER, N., MURAVCHIK, C., AND NEHORAI, A. Meg forward problem formulation using equivalent surface current densities. *IEEE Trans. Biomed. Eng.* 52 (July 2005), 1210–1217.
- [118] WANG, J., WILLIAMSON, S., AND KAUFMAN, L. Magnetic source imaging based on the minimum-norm least-squares inverse. *Brain Topography* 5 (1993), 365–371.
- [119] WILTON, D. R., RAO, S. M., GLISSON, A. W., SCHAUBERT, D. H., AL-BUNDAK, O. M., AND BUTLER, C. M. Potential integrals for uniform and linear source distributions on polygonal and polyhedral domains. *IEEE Trans. Antenn. Propag.* 32, 3 (Mar. 1984), 276–281.
- [120] WITWER, J., TREZEK, G., AND JEWETT, D. The effect of media inhomogeneities upon in tracraniel electrical fields. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering* 19 (1972), 352–362.
- [121] WOLTERS, C. H. *Influence of Tissue Conductivity Inhomogeneity and Anisotropy on EEG/MEG based Source Localization in the Human Brain*. PhD thesis, Universität Leipzig, Fakultät für Mathematik und Informatik, 2003.
- [122] YAN, Y., NUNEZ, P., AND R.T., H. Finite element model of the human head : scalp potentials due to dipole sources. In *Medical and Biological Engineering and Computing* (1991), vol. 32, pp. 475–481.
- [123] ZANOW, F., AND KNŤSCHE, T. R. Asa-advanced source analysis of continuous and event-related eeg/meg signals. *Brain Topography* 16 (2004), 287–290.
- [124] ZHANG, Y., ZHU, S., AND HE, B. A second-order finite element algorithm for solving the three-dimensional eeg forward problem. *Phys. Med. Biol.* 49, 13 (2004), 2975–2987.
- [125] ZHANG, Z. A fast method to compute surface potentials generated by dipoles within multilayer anisotropic spheres. *Phys. Med. Biol.* 40 (1995), 335–349.
- [126] ZIMMERMAN, J., THIENE, P., AND HARDING, J. Design and operation of stable rf-biased superconducting point-contact quantum devices and a note on the properties of perfectly clean metal contacts. *Journal of Applied Physics* 41 (1970), 1572–1580.